



Identification par imagerie laser d'un objet dissimulé - Aspects mathématiques et numériques

Jean-Baptiste Bellet

► To cite this version:

Jean-Baptiste Bellet. Identification par imagerie laser d'un objet dissimulé - Aspects mathématiques et numériques. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Ecole Polytechnique X, 2010. Français. NNT : . pastel-00549386

HAL Id: pastel-00549386

<https://pastel.archives-ouvertes.fr/pastel-00549386>

Submitted on 21 Dec 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Thèse présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Spécialité Mathématiques Appliquées

par

Jean-Baptiste BELLET

Identification par imagerie laser d'un objet dissimulé
Aspects mathématiques et numériques

Soutenue le 10 décembre 2010 devant le jury composé de :

M. Habib Ammari	<i>Directeur de thèse</i>
M. Didier Auroux	<i>Rapporteur</i>
M. Gérard Berginc	<i>Directeur de thèse</i>
M. Didier Felbacq	<i>Rapporteur</i>
M. Josselin Garnier	<i>Examineur</i>
M. Vincent Giovangigli	<i>Président du jury</i>
M. François Jouve	<i>Examineur</i>

*L'étude approfondie de la nature est la source la
plus féconde des découvertes mathématiques,*

Jean-Baptiste Joseph FOURIER.

Remerciements

Cette thèse est l'aboutissement de trois ans de travail orchestré par Habib Ammari et Gérard Berginc. C'est un privilège d'avoir été formé par des scientifiques aussi passionnés et brillants. En plus de leurs compétences techniques, j'ai profité de leur vision de la recherche scientifique pour me forger la mienne. Je les remercie donc chaleureusement pour tout ce qu'ils m'ont apporté, leurs conseils, leurs suggestions, mais aussi pour leur sympathie et la confiance qu'ils m'ont accordée dès notre première rencontre.

Je remercie l'intégralité des membres du jury d'avoir participé à l'examen de mes travaux : mes directeurs, les rapporteurs Didier Auroux et Didier Felbacq, le président Vincent Giovangigli, les examinateurs Josselin Garnier et François Jouve.

Je remercie les membres du Centre de Mathématiques Appliquées qu'il est toujours agréable de croiser dans les couloirs ou autour d'un café. À titre d'exemple, la bonne humeur de Radoïn Belaouar, Vincent Giovangigli ou bien encore Andrey Piatnitski ne peut être que contagieuse. Je décerne par ailleurs une mention spéciale pour Sylvain Ferrand et son compère Robert Brizzi pour leur soutien permanent, leurs plaisanteries, leur amitié en somme ! Merci au personnel administratif aimable et serviable, plus particulièrement Wallis Filippi, Sébastien Jakubowicz, Anna Johnsson, Sandra Schnakenbourg.

Je remercie le personnel de Thales avec qui il a été agréable de communiquer pendant cette thèse. Je pense par exemple à Michel Jouffroy, tant modeste que compétent, ou à Laurence Gasnot, toujours efficace pour les démarches administratives.

Je remercie les professeurs de Mathématiques de ma scolarité qui ont su faire vibrer en moi cette passion qui m'a poussé jusqu'à cette thèse. Pour n'en citer que quelques uns, Reynald Degrémont, Jean-Claude Chauvière, Grégoire Taviot, Stéphane Legros, Érik Lenglar, Witold Respondek.

Je remercie tous les doctorants du CMAP pour leurs discussions, scientifiques ou non, leur sympathie, et pour tous les très bons moments que j'ai pu passer à leurs côtés. La liste comprend, notamment : Maria Soledad Aronna, Yosra Boukari, Isabelle Camilier, Sylvie Detournay, Lili Guadarrama Bustos, Iryna Pankratova, Eduardo Godoy, Ricardo Hein, Carlos Jerez, Vincent Jugnon, Dimitri Nicolas, Meisam Sharify, Francisco Silva, Denis Villemonais, Abdul Wahab, Guoshen Yu, etc. En plus de leur sympathie, ils ont enrichi ma culture sous de nombreux angles, de la bière belge au mode de pensée iranien...

Je remercie tous mes amis, avec qui je passe autant d'excellents moments, dans des repas, en jouant de la musique, en vacances, etc. Leur attention est d'un soutien remarquable ; leurs plaisanteries sont incessantes. Une liste non-exhaustive des amis avec qui je m'amuse tant : Aurore Cano, Grégory Cure, Catherine Maniette, Samuel Cure, Thanh Mai Van, Julien Delaître, Noémie Lepetit, Jérémy Hure et son épouse, Julien Lefebvre, Mamadou Oumar Keita, etc.

Je remercie très vivement toute ma courageuse famille pour la confiance qu'elle m'a toujours accordée. Elle m'a toujours encouragé et soutenu, notamment dans la construction de mon parcours scolaire, de mon école maternelle à ce doctorat. Merci donc à mon père Daniel, ma mère Carole, mes deux frères Jérémy et Jean-Richard. Un clin d'œil à mes deux neveux, Kylian et Célia, qui ont hélas grandi beaucoup trop vite pendant ces trois dernières années.

Enfin, je souhaite remercier très chaleureusement ma petite amie Céline Lécuyer, la femme de l'ombre de cette thèse. Elle a été à mon écoute, autant lors de mes succès que lors de mes doutes. Elle m'a secondé pendant l'intense période de rédaction. Et elle a regalé la camaraderie par le pot de soutenance qu'elle a très soigneusement préparé et orchestré. Je lui suis très reconnaissant pour l'ensemble de son œuvre. Aussi, merci à sa famille pour son accueil si chaleureux.

Table des matières

1	Introduction	1
I	Problème direct modèle	5
2	Introduction	7
3	Modélisation	9
3.1	Introduction	9
3.2	Milieux fluctants	9
3.2.1	Tenue de camouflage	9
3.2.2	Peau	9
3.3	Modèle envisagé	9
3.3.1	Revue des modèles	9
3.3.2	Modèle électromagnétique	10
3.3.3	Formalisation	10
3.3.4	Conclusion	10
4	Modèle effectif	13
4.1	Introduction	13
4.2	Homogénéisation	13
4.3	Couche mince	15
4.3.1	Introduction	15
4.3.2	Preliminaire	15
4.3.3	Développement	18
4.3.4	Conditions de transmission	23
4.4	Synthèse	23
4.A	Problèmes de cellule	24
4.A.1	Introduction	24
4.A.2	Homogénéisation	24
4.A.3	Conditions de transmission	25
4.A.4	Éléments finis	25
5	Analyse de Fourier	27
5.1	Introduction	27
5.2	Solution	28
5.3	Fonction de Green	31
5.4	Conclusion	33

6	Fonction de Green effective	35
6.1	Introduction	35
6.2	Problème posé	35
6.2.1	Notations	36
6.2.2	Position du problème	36
6.3	Terme source	36
6.4	Terme de réflexion	37
6.4.1	Introduction	37
6.4.2	Méthode de plus forte descente	37
6.4.3	Interpolation de type Spline	42
6.4.4	Synthèse	42
6.5	Terme de transmission	44
6.5.1	Introduction	44
6.5.2	Méthode de plus forte descente	44
6.5.3	Synthèse	46
6.6	Conclusion	46
6.A	Fonction auxiliaire	46
6.B	Pôles	49
7	Modèle d'objet dissimulé	51
7.1	Introduction	51
7.2	Problème posé	52
7.3	Représentation intégrale	52
7.3.1	Introduction	52
7.3.2	Représentation intégrale	52
7.3.3	Formulation variationnelle	53
7.4	Calcul numérique d'intégrales	53
7.4.1	Introduction	53
7.4.2	Formules de quadrature	54
7.4.3	Résultats préliminaires	54
7.4.4	Fonction de Green de l'anomalie	57
7.4.5	Fonction de Green de fond	57
7.5	Éléments finis	58
7.5.1	Introduction	58
7.5.2	Discrétisation	58
7.5.3	Système linéaire	58
7.5.4	Solution	59
7.6	Conclusion	60
8	Résultats numériques	61
8.1	Introduction	61
8.2	Tests	61
8.2.1	Entrées	61
8.2.2	Analyse asymptotique	61
8.2.3	Problème effectif	62
8.2.4	Objet dissimulé	62
9	Conclusion	67
II	Algorithmes d'inversion	69
10	Introduction	71

11 Problème inverse	73
11.1 Problème direct	73
11.1.1 Problème considéré	73
11.1.2 Calcul de la solution	73
11.2 Problème inverse	74
11.2.1 Mesures	74
11.2.2 Formulation du problème inverse	74
12 Méthode d'inversion directe	75
12.1 Introduction	75
12.2 Formulation mathématique	75
12.2.1 Mesures	75
12.2.2 Approximation haute fréquence	76
12.2.3 Démarche	76
12.3 Équation de transport	78
12.3.1 Caractéristique	78
12.3.2 Transport	78
12.4 Méthode de dérivée topologique	79
12.4.1 Dérivée topologique	79
12.4.2 Méthode d'inversion directe	79
12.5 Illustration numérique	80
12.6 Conclusion et perspectives	82
12.A Transport sur les caractéristiques	82
12.A.1 Introduction	82
12.A.2 Préliminaires	82
12.A.3 Méthode des caractéristiques	83
12.A.4 Développement de la caractéristique	83
12.A.5 Calcul le long d'une caractéristique	84
13 Méthode d'inversion itérative	87
13.1 Introduction	87
13.2 Optimisation de forme	87
13.2.1 Introduction	87
13.2.2 Calculs des gradients	88
13.2.3 Descente de gradient	89
13.3 Résultats numériques	90
13.3.1 Introduction	90
13.3.2 Paramètres fixés	90
13.3.3 Initialisation	90
13.3.4 Pas de descente	93
13.3.5 Résolution	93
13.3.6 Contraste	97
13.3.7 Stabilité	97
13.4 Conclusion et perspectives	99
14 Conclusion	101
Annexes	103
A Logiciel d'électromagnétisme	105
A.1 Fonctions	105
A.2 Structure du programme	106
A.3 Conclusion et perspectives	108

B Validation du code	109
B.1 Introduction	109
B.2 Problème direct	109
B.3 Diffraction par un disque	109
B.4 Comparaison des résultats	110
B.5 Conclusion	110
Bibliographie	114

Introduction

Voir l'invisible est un défi que l'homme essaie de relever depuis des générations entières, dans d'innombrables domaines. On peut citer, le fontainier à la recherche d'une fuite d'eau, le géophysicien à la recherche d'une réserve de pétrole, le sous-marinier à la recherche de cibles ennemies, le contrôleur aérien qui souhaite surveiller son espace, ou bien encore le médecin qui souhaite imager l'intérieur du corps de son patient. Les méthodes employées sont passées des plus empiriques, tel l'oreille du fontainier, à des technologies sophistiquées, tel l'appareil IRM du médecin. Cette évolution a été possible notamment grâce au développement conjoint des Mathématiques, de la Physique, et de l'outil informatique. Le but en imagerie est désormais de développer des techniques reposant sur un traitement mathématique et numérique de données physiques adéquates. Cette thématique constitue à elle seule une branche des Mathématiques en plein essor : l'imagerie mathématique.

Dans ce contexte de Recherche et Technologie, la société THALES souhaiterait tirer profit de son expertise en Optronique pour créer un dispositif d'imagerie tri-dimensionnelle. Celà s'inscrit dans sa volonté de fournir des technologies efficaces d'identification, pour assurer la sécurité. Un enjeu considérable est la reconnaissance de véhicules, ou d'objets camouflés, tel les engins explosifs improvisés (*Improvised Explosive Devices* : IED), bombes artisanales utilisées par les forces terroristes, notamment en Afghanistan ou en Irak.

Le dispositif d'identification contiendrait un laser et un récepteur. Le récepteur serait chargé de mesurer l'intensité de l'onde rétrodiffusée par un objet à la suite d'une illumination par le laser. En faisant évoluer la position du dispositif, on obtiendrait un ensemble de mesures. Couplé à une partie algorithmique exploitant ces mesures, on obtiendrait alors une image de l'objet. Le développement de la partie algorithmique est un des rôles du mathématicien appliqué ; sa phase d'étude amont nous a été confiée par THALES dans le cadre d'une convention CIFRE.

Ainsi, le but de cette thèse consiste à développer des techniques modèles d'imagerie, pour des problèmes inspirés des applications. Ces techniques contiendront les concepts permettant d'appréhender des problèmes plus complexes et plus réalistes. Comme en imagerie mathématique en général, notre approche comportera deux phases. La première phase consiste à établir un modèle des phénomènes physiques du problème. La deuxième phase consiste à établir des algorithmes d'imagerie, à partir du modèle physique.

Dans un premier temps, nous avons formulé et résolu un problème modèle de diffusion des ondes électromagnétiques par un milieu inhomogène avec une couche rugueuse. L'objet à imager est représenté par une inclusion enfouie. Ce type de modèle, général, promet des applications variées. Il peut modéliser, un objet caché dans une tenue de camouflage pour les applications militaires, ou une tumeur dans la peau pour des applications médicales. Notre modèle est bi-dimensionnel, périodique, régi par les équations de Helmholtz. Nous avons résolu le problème par les techniques de l'électromagnétisme. Un modèle effectif est obtenu par les techniques asymptotiques des problèmes multi-échelles. L'analyse de Fourier permet de calculer la solution effective et d'exprimer la fonction de Green sous forme d'intégrales de Sommerfeld. Celles-ci sont évaluées par la méthode de plus forte descente. Enfin, la solution du problème est calculée par la méthode des équations intégrales.

Dans un second temps, nous avons développé des techniques modèles de reconstruction d'un objet par illumination laser. L'objet est placé dans l'espace libre, il est supposé près de l'origine, ses paramètres électromagnétiques sont supposés connus. Les mesures sont prises en champ lointain, elles sont monofréquentielles et monostatiques. Nous avons développé une nouvelle méthode de reconstruction directe de type dérivée topologique, pour des mesures d'amplitude, ce qui correspond à l'application. D'autre part, nous avons développé des méthodes itératives inspirées de l'optimisation de forme, de type descente gradient, pour des mesures avec amplitude, et avec phase ou non.

Enfin, en parallèle de l'étude théorique, nous avons développé un code de calcul dans un langage orienté objet. Celui-ci permet de tester les méthodes que nous avons développées. Il contient notamment un code éléments finis de frontière ainsi qu'une méthode d'évolution de contours.

Structure du manuscrit

Nous résumons ci-dessous les travaux que l'on présente dans ce manuscrit.

Problème direct modèle Dans cette première partie, nous formulons un problème modèle de diffusion des ondes électromagnétiques. Nous utilisons un grand nombre de techniques classiques que nous adaptons à notre problème pour parvenir à le résoudre.

Modélisation Nous établissons un modèle canonique représentant aussi bien une tenue de camouflage que la peau. Le modèle comporte un demi-espace périodique inhomogène surmonté d'une couche mince périodique. Le modèle est multi-échelles, bi-dimensionnel, régi par l'équation de Helmholtz.

Modèle effectif Par les techniques asymptotiques des milieux multi-échelles, le demi-espace inférieur est homogénéisé, puis la couche rugueuse est remplacée par des conditions de transmission, que nous établissons à l'aide de correcteurs de couche limite. Ceci conduit à un modèle effectif original à deux demi-espaces. Le demi-espace inférieur est homogène anisotrope. Les conditions de transmission à l'interface sont de type impédance généralisée.

Analyse de Fourier L'analyse de Fourier, tangentiellement à l'interface entre les deux demi-espaces, permet de calculer la solution du milieu effectif. Elle permet également d'exprimer la fonction de Green à l'aide d'intégrales de Sommerfeld. Nous donnons enfin une condition suffisante pour vérifier l'absence de pôles réels pour la fonction de Green spectrale.

Fonction de Green effective Nous simplifions l'expression des intégrales de Sommerfeld, pour évaluer la fonction de Green du milieu effectif. Un terme est identifié à un terme source, à base d'une fonction de Hankel. Les autres termes, de réflexion, et de transmission, sont évalués par la méthode de plus forte descente, et s'expriment ainsi à l'aide de la contribution de points critiques : pôles, points de branchement et point selle.

Modèle d'objet dissimulé On enfouit un objet dans le milieu modèle étudié, ce qui donne un modèle d'objet camouflé, ou de tumeur dans la peau. La solution possède alors une représentation intégrale sur le bord de l'objet, à base de convolutions à noyau de Green. On calcule alors la solution par la méthode des équations intégrales. Cela repose essentiellement sur des calculs d'intégrales ; une attention particulière est portée sur la singularité de la fonction de Green.

Résultats numériques On illustre numériquement les résultats de cette partie : calcul du modèle effectif, de sa solution, de sa fonction de Green, puis solution du problème de l'objet caché.

Algorithmes d'inversion Dans cette deuxième partie, nous développons des algorithmes modèles de reconstruction laser. Nous développons une méthode directe adaptée aux mesures d'intensité, ainsi qu'une méthode itérative générale.

Méthode directe Nous établissons une méthode directe de reconstruction pour le cas où les mesures ne contiennent que l'amplitude, avec vue partielle. Il s'agit d'une méthode originale de type dérivée topologique, basée sur une approximation haute fréquence : équation de transport. Nous illustrons numériquement les résultats de la méthode.

Méthode itérative Nous établissons une méthode itérative de reconstruction de type descente de gradient, inspirée de l'optimisation de forme. Les mesures contiennent l'amplitude, avec phase ou non. Le gradient du coût est exprimé à l'aide d'une fonction de Green. Nous présentons quelques résultats numériques.

Annexes

Logiciel Nous présentons la structure du code que nous avons développé en langage objet pour les simulations.

Validation du code Nous validons notre code dans un cas test où la solution est connue analytiquement.

Première partie

Problème direct modèle

Introduction

Nous sommes motivé par l'élaboration de techniques d'imagerie laser d'un objet dans une tenue de camouflage. Une telle étude repose avant-tout sur un bon modèle physique du problème. Ainsi, nous élaborons dans cette partie un problème modèle que nous résolvons. Nos travaux constituent un pas important dans la compréhension du problème; les techniques que nous développons sont destinées à servir de modèle pour la résolution future de problèmes plus réalistes.

Le modèle que l'on étudie est un modèle à deux couches. Il contient un demi-espace infini contenant des inclusions, et une couche rugueuse. Cela est adapté en première approche de tenue de camouflage, et sert également de modèle de peau, ce qui rend les applications très nombreuses. Par souci de simplicité, nous réduisons l'étude à un modèle bi-dimensionnel gouverné par l'équation de Helmholtz. D'autre part, nous nous plaçons dans un contexte périodique, transition entre un modèle « plat » et un modèle aléatoire plus réaliste. Le modèle est par ailleurs supposé multi-échelles. Enfin, la présence d'un objet à détecter, disons une bombe camouflée, ou une tumeur dans la peau, se traduit par une inclusion enfouie dans le demi-espace inférieur.

Le caractère multi-échelles et périodique de notre modèle conduisent à l'approcher par un modèle effectif qui lui est équivalent. Par homogénéisation, le milieu inférieur inhomogène et isotrope est approché par un milieu homogène et anisotrope. Quant à la couche, nous élaborons des conditions de transmission qui lui sont équivalentes. Elles sont de type conditions d'impédance généralisée. L'étude porte donc ensuite sur ce milieu effectif, avec ou sans objet enfoui.

À l'aide de l'analyse de Fourier tangentielle au bord du milieu effectif, on obtient la solution du problème dans ce milieu. Une analyse analogue permet d'en exprimer la fonction de Green sous forme d'intégrales de Sommerfeld. Les deux fonctions se décomposent à l'aide d'un terme source, d'un terme de réflexion et d'un terme de transmission. Les termes sont explicites pour la solution. Pour la fonction de Green, le terme source est identifié à une fonction de Green d'un espace libre, les deux autres termes sont évalués de manière asymptotique par la méthode de plus forte descente.

En présence d'un objet, la solution du problème possède une représentation intégrale simple couche. Les conditions de transmission sur le bord de l'objet permettent de transformer le problème en un système d'équations intégrales. Écrit sous forme variationnelle, puis discrétisé, ce système conduit à un système linéaire. La matrice de ce système est pleine; elle contient essentiellement des intégrales à base de fonctions de Green, dont il faut traiter avec attention les singularités. Le second membre du système contient des intégrales à base de la solution du problème de fond, sans objet.

Cette partie s'organise de la façon suivante. D'abord, nous exposons notre modélisation du problème. Puis, nous obtenons un modèle effectif. Ensuite, nous calculons la solution du problème effectif, ainsi que la fonction de Green associée. Enfin, le dernier chapitre contient le calcul de la solution du problème en présence d'un objet dissimulé.

Modélisation du milieu

3.1 Introduction

Nous souhaitons établir un problème modèle de diffusion des ondes électromagnétiques par un milieu fluctuant avec interface rugueuse illuminé par un laser. Un tel problème sert de modèle de tenue de camouflage ou de peau. Nous passons en revue la littérature au sujet des modèles mathématiques utilisés dans le contexte de la peau. Enfin, nous formalisons notre propre approche.

3.2 Milieux fluctants avec surfaces rugueuses

Les milieux fluctuants, multi-couche, avec des surfaces rugueuses, sont des milieux très généraux. Ils peuvent aussi bien modéliser la peau, qu'une tenue de camouflage.

3.2.1 Tenue de camouflage

Pour cacher un objet, on peut l'enfouir dans un milieu non homogène, recouvert d'un filet de camouflage. Ceci conduit à modèle de milieu fluctuant avec une couche rugueuse. Aussi, la couche rugueuse peut servir à modéliser une couche de peinture.

3.2.2 Peau

La peau est un milieu multi-couche. Elle contient notamment, successivement, la couche cornée, l'épiderme, et le derme. La couche cornée en constitue la surface. Les différentes interfaces sont rugueuses. Enfin, ces couches ne sont pas homogènes ; elle peuvent contenir de l'hémoglobine, de la mélanine, des fibres de collagène, etc. Ces inhomogénéités sont naturellement réparties de façon aléatoire. En somme, la peau est un milieu très complexe. La diversité des paramètres qui la caractérisent sont autant d'inconnues qui rendent si difficiles les techniques d'imagerie.

3.3 Modèle envisagé

3.3.1 Revue des modèles

Différentes études ont déjà été menées sur les propriétés optiques de la peau [13, 15]. Elles permettent d'estimer les paramètres optiques des inhomogénéités (absorption et diffusion) par des méthodes spectrales. La plupart d'entre-elles est basée sur des modèles de transfert radiatif phénoménologique [41, 34, 33, 19]. Un de leurs défauts est qu'elles ne traitent pas convenablement la rugosité des interfaces. Soit parce qu'abusivement le modèle les suppose planes. Soit parce que le modèle du transfert radiatif utilisé ne rend pas compte de l'ensemble des phénomènes physiques, notamment la rétrodiffusion cohérente [38, 31]. Dans [18], il est suggéré de surmonter ce défaut en établissant, à partir des équations de Maxwell, un nouveau modèle de transfert radiatif qui prend en compte de nouvelles contributions [39].

3.3.2 Modèle électromagnétique

Pour notre part, nous proposons une approche directement électromagnétique, dans un milieu contenant un demi-espace avec des inhomogénéités, surmonté d'une couche rugueuse homogène. La couche représente la couche cornée de la peau, ou un filet de camouflage. Le demi-espace constitue l'intérieur de la peau, ou un milieu de camouflage.

Le modèle de Maxwell tri-dimensionnel est réduit en un modèle de Helmholtz bi-dimensionnel, ce qui revient à se placer dans le contexte d'un milieu cylindrique avec ondes de polarisation Transverse Magnétique. Nous modélisons l'illumination par laser par l'envoi d'une onde incidente plane. On se place dans le contexte périodique, cas transition entre un milieu plat et un milieu aléatoire. Enfin, on se place dans un cadre asymptotique multi-échelles. La couche est mince par rapport à la longueur d'onde, et les inhomogénéités sont petites par rapport à la couche mince.

3.3.3 Formalisation

On modélise la couche supérieure par la couche mince périodique $\mathcal{D}_\xi^{\text{cl}} = \{(x_1, x_2) : 0 < x_2 < \xi f(x_1/\xi)\}$, où $f > 0$ est une fonction 1-périodique, et $\xi > 0$ est un petit paramètre (par rapport à la longueur d'onde). Cette couche mince est délimitée par les interfaces $\gamma_0 = \{x_2 = 0\}$ et $\gamma_\xi = \{(x_1, \xi f(x_1/\xi)), x_1 \in \mathbb{R}\}$. La sous-couche est le demi-espace $\mathcal{D}^- = \{x_2 < 0\}$. Le milieu extérieur est $\mathcal{D}_\xi^+ = \{x_2 > \xi f(x_1/\xi)\}$.

Le milieu supérieur \mathcal{D}_ξ^+ et la couche $\mathcal{D}_\xi^{\text{cl}}$ sont homogènes. Le milieu inférieur \mathcal{D}^- est un milieu ξY -périodique contenant des petites inclusions, où la cellule de référence $Y = (0, \ell_1) \times (0, \ell_2)$ ($\ell_1, \ell_2 > 0$) contient une inhomogénéité B . Bien que la taille caractéristique de la période soit encore notée ξ dans \mathcal{D}^- , nous la supposons être à une échelle inférieure à la taille de la couche.

Dans la cellule Y , la perméabilité et la permittivité sont respectivement :

$$\mu_Y(y) = \mu_B \mathbb{1}_B(y) + \mu \mathbb{1}_{Y \setminus B}(y), \quad \varepsilon_Y(y) = \varepsilon_B \mathbb{1}_B(y) + \varepsilon \mathbb{1}_{Y \setminus B}(y),$$

où $\mu_B, \mu, \varepsilon_B, \varepsilon > 0$ sont des constantes. Dans tout le domaine \mathbb{R}^2 , la perméabilité et la permittivité sont respectivement :

$$\begin{aligned} \mu_\xi(x) &= \mu^+ \mathbb{1}_{\mathcal{D}_\xi^+}(x) + \mu^{\text{cl}} \mathbb{1}_{\mathcal{D}_\xi^{\text{cl}}}(x) + \mu_Y(x/\xi) \mathbb{1}_{\mathcal{D}^-}(x), \\ \varepsilon_\xi(x) &= \varepsilon^+ \mathbb{1}_{\mathcal{D}_\xi^+}(x) + \varepsilon^{\text{cl}} \mathbb{1}_{\mathcal{D}_\xi^{\text{cl}}}(x) + \varepsilon_Y(x/\xi) \mathbb{1}_{\mathcal{D}^-}(x), \end{aligned}$$

où $\mu^+, \varepsilon^+ > 0$ sont des constantes et où l'on a prolongé par périodicité les coefficients dans \mathcal{D}^- , et $\mathbb{1}$ est la fonction indicatrice.

On illumine dans la partie supérieure du domaine, par une onde plane $u_{\text{inc}}(x) = e^{ik^+ \hat{\theta} \cdot x}$. Cette onde est de pulsation $\omega > 0$, de nombre d'onde $k^+ = \omega \sqrt{\varepsilon^+ \mu^+}$, d'angle d'incidence $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ avec $\hat{\theta}_2 < 0$ et $|\hat{\theta}| = 1$. La longueur d'onde est $\lambda^+ := 2\pi/k^+$, supposée grande par rapport à la taille de la couche mince ξ .

Le problème modèle (Figure 3.1) consiste alors en l'étude de la propagation de l'onde résultante u_ξ dans le milieu :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \frac{1}{\mu_\xi} \nabla u_\xi + \omega^2 \varepsilon_\xi u_\xi = 0, & \text{dans } \mathbb{R}^2, \\ + \text{condition de radiation.} \end{cases} \quad (3.1)$$

La condition de radiation sélectionne la solution du physique du problème. En particulier, elle veille à ce que l'onde réfléchie $u_\xi - u_{\text{inc}}$ dans le milieu supérieur \mathcal{D}_ξ^+ et l'onde transmise u_ξ dans le milieu inférieur \mathcal{D}^- soient des ondes sortantes.

3.3.4 Conclusion

Le problème (3.1) est un problème modèle de milieu fluctuant avec une couche rugueuse éclairé par un laser. Son caractère purement électromagnétique, sa couche rugueuse, et son caractère non homogène constituent une avancée importante dans le domaine. Certes simpliste par rapport à la

réalité, il est mathématiquement intéressant et constitue un pas important à franchir pour pouvoir espérer résoudre rigoureusement le problème de Maxwell tri-dimensionnel dans un milieu aléatoire avec de nombreuses couches rugueuses.

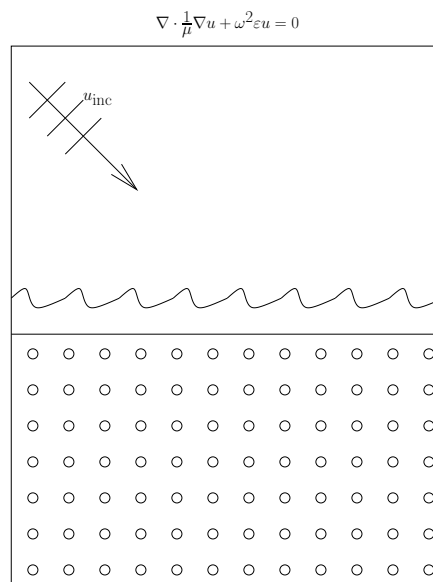


FIG. 3.1: Problème direct modèle

Modèle effectif

4.1 Introduction

Les milieux multi-échelles périodiques sont étudiés intensément depuis plusieurs décennies. Dans cette classe de problèmes, on distingue notamment la théorie de l'homogénéisation et l'étude de couches minces fortement oscillantes.

Une approche classique en homogénéisation consiste à écrire un développement asymptotique à deux échelles [22]. Celui-ci a pour but de donner une interprétation macroscopique d'un milieu décrit initialement par des variations microscopiques. Cela améliore grandement les schémas numériques : les maillages très fins pour prendre en compte les variations microscopiques, coûteux en temps de calculs, ne sont plus nécessaires ; les calculs sont ramenés sur des périodes élémentaires.

Concernant les couches minces fortement oscillantes, les objectifs sont similaires à ceux de l'homogénéisation. Il s'agit d'obtenir des conditions au bord ou de transmission, qui équivalent à la couche. Deux techniques aux résultats équivalents sont couramment utilisées. L'une consiste à obtenir le développement itérativement, terme après terme, par ajout de correcteurs successifs [1]. L'autre méthode consiste à raccorder un développement asymptotique en champ lointain, avec un développement en champ proche, dans la zone de transition.

En général, les développements sont tout d'abord obtenus formellement. Puis, ils sont justifiés par des estimations d'erreurs, et plus généralement des résultats de convergence. Parmi les techniques classiques, on peut citer la méthode des fonctions oscillantes de Murat-Tartar [40], ou la convergence à deux échelles de Nguetseng-Allaire [4].

Dans le chapitre 3, le problème modèle (3.1) que nous avons formulé est périodique à plusieurs échelles. Il comporte un demi-espace inférieur périodique surmonté d'une couche mince fortement oscillante. Dans un premier temps, nous homogénéisons le milieu inférieur par les techniques classiques. Puis, nous approchons l'effet de la couche mince oscillante, dans le même esprit que [23]. Nous effectuons l'analyse asymptotique formellement, sans preuve de convergence. Elle est faite en deux temps, en approchant d'abord à l'ordre 0 le milieu inférieur, puis à l'ordre 1 la couche. Ceci est raisonnable car nous avons supposé que l'échelle du milieu inférieur est plus petite que l'échelle de la couche. Si l'échelle était la même, il conviendrait plutôt d'effectuer une analyse en une seule étape, comme dans [6].

Dans un premier temps, nous homogénéisons le milieu inférieur. Puis, nous élaborons des conditions de transmission qui équivalent à l'effet de la couche rugueuse. Ceci fournit alors un modèle effectif, à deux demi-espaces, avec le demi-espace inférieur anisotrope, et des conditions de transmission à l'interface.

4.2 Homogénéisation

Le milieu inférieur \mathcal{D}^- est un milieu ξY -périodique contenant des petites inclusions, où la cellule de référence $Y = (0, \ell_1) \times (0, \ell_2)$ contient une inclusion B , et ξ est un petit paramètre. Dans la

cellule Y , la perméabilité et la permittivité sont respectivement :

$$\mu_Y(y) = \mu_B \mathbb{1}_B(y) + \mu \mathbb{1}_{Y \setminus \overline{B}}(y), \quad \varepsilon_Y(y) = \varepsilon_B \mathbb{1}_B(y) + \varepsilon \mathbb{1}_{Y \setminus \overline{B}}(y).$$

Dans \mathcal{D}^- , la perméabilité et la permittivité sont périodiques :

$$\mu_\xi(x) = \mu_Y(x/\xi), \quad \varepsilon_\xi(x) = \varepsilon_Y(x/\xi).$$

La fonction u_ξ satisfait l'équation de Helmholtz :

$$\nabla \cdot \frac{1}{\mu_\xi} \nabla u_\xi + \omega^2 \varepsilon_\xi u_\xi = 0, \quad \text{dans } \mathcal{D}^-.$$

La théorie classique de l'homogénéisation dans des milieux périodiques suggère de décomposer cette fonction sous la forme du développement à deux échelles :

$$u_\xi(x) = u_0\left(x, \frac{x}{\xi}\right) + \xi u_1\left(x, \frac{x}{\xi}\right) + \xi^2 u_2\left(x, \frac{x}{\xi}\right) + \dots$$

On peut trouver, par exemple, le détail des calculs d'un cas similaire au nôtre dans [5]. Formellement, en injectant ce développement dans l'équation satisfaite par u_ξ , en identifiant ensuite les différentes puissances de ξ , on aboutit à suite d'équations en cascade. Celle provenant du terme en ξ^{-2} implique que $u_0(x, y) = u_0(x)$ ne dépend que de x . Celle provenant du terme en ξ^{-1} prouve que

$$u_1\left(x, \frac{x}{\xi}\right) = -\chi\left(\frac{x}{\xi}\right) \cdot \nabla u_0(x) + \tilde{u}_1(x),$$

où χ est l'unique solution Y -périodique à moyenne nulle de

$$\nabla_y \cdot \frac{1}{\mu_Y(y)} \nabla_y \chi(y) = \nabla_y \cdot \frac{1}{\mu_Y(y)} \mathbf{I}, \quad y \in Y.$$

Enfin, en écrivant la condition de compatibilité sur l'équation provenant du terme en ξ^0 , on trouve l'équation homogénéisée sur u_0 :

$$\nabla \cdot A^* \nabla u_0 + \omega^2 \varepsilon^* u_0 = 0, \quad \text{dans } \mathcal{D}^-,$$

où les coefficients homogénéisés sont :

$$A^* = \frac{1}{|Y|} \int_Y \frac{1}{\mu_Y(y)} (\mathbf{I} - \nabla \chi(y)) dy, \quad \varepsilon^* = \frac{1}{|Y|} \int_Y \varepsilon_Y(y) dy = f_B \varepsilon_B + (1 - f_B) \varepsilon, \quad (4.1)$$

où $f_B = \frac{|B|}{|Y|}$ est la proportion de B dans Y . La matrice A^* est symétrique définie positive, et dépend de χ , solution d'un problème cellule. Numériquement, on résout ce dernier par la méthode des éléments finis. On se reportera à l'annexe 4.A pour la formulation variationnelle.

Remarque. La fonction \tilde{u}_1 n'a pas été déterminée ; sans pousser le développement plus loin qu'à l'ordre 1, elle peut être arbitraire, et peut être choisie par exemple nulle. Si on souhaitait pousser le développement plus loin, elle devrait satisfaire une condition de compatibilité. ■

À une échelle supérieure à ξ , on peut approcher u_ξ par u_0 , son terme d'ordre 0. L'effet du milieu inférieur inhomogène isotrope de paramètres μ_ξ, ε_ξ , équivaut ainsi à l'effet du milieu homogène anisotrope de paramètres A^*, ε^* , dits paramètres effectifs. Nous remplacerons donc dans la suite le milieu inhomogène par ce milieu homogène effectif. Par abus de notation, on continuera à noter u_ξ la solution.

4.3 Couche mince

4.3.1 Introduction

La couche mince ξ -périodique $\mathcal{D}_\xi^{\text{cl}} = \{(x_1, x_2) : 0 < x_2 < \xi f(x_1/\xi)\}$, est délimitée par les interfaces $\gamma_0 = \{x_2 = 0\}$ et $\gamma_\xi = \{(x_1, \xi f(x_1/\xi)), x_1 \in \mathbb{R}\}$. Elle est sous le milieu extérieur $\mathcal{D}_+^\xi = \{x_2 > \xi f(x_1/\xi)\}$ et sur le demi-espace inférieur $\mathcal{D}^- = \{x_2 < 0\}$. Notons le demi-espace supérieur $\mathcal{D}^+ = \{x_2 > 0\}$.

L'homogénéisation de la section 4.2 suggère les paramètres suivants pour le milieu :

$$A_\xi(x) = \frac{1}{\mu^+} \mathbb{1}_{\mathcal{D}_+^\xi}(x) + \frac{1}{\mu^{\text{cl}}} \mathbb{1}_{\mathcal{D}_\xi^{\text{cl}}}(x) + A^* \mathbb{1}_{\mathcal{D}^-}(x), \quad \varepsilon_\xi(x) = \varepsilon^+ \mathbb{1}_{\mathcal{D}_+^\xi}(x) + \varepsilon^{\text{cl}} \mathbb{1}_{\mathcal{D}_\xi^{\text{cl}}}(x) + \varepsilon^* \mathbb{1}_{\mathcal{D}^-}(x),$$

où $A^* =: \begin{bmatrix} r & s \\ s & t \end{bmatrix}$ et ε^* sont donnés par (4.1).

Le problème est alors le suivant :

$$\begin{cases} \nabla \cdot A_\xi \nabla u_\xi + \omega^2 \varepsilon_\xi u_\xi = 0, & \text{dans } \mathbb{R}^2, \\ + \text{condition de radiation.} \end{cases}$$

En suivant la démarche de [1] et [23], nous allons écrire un développement asymptotique de u_ξ :

$$u_\xi(x) = u_0(x) + u_0^{\text{cl},\xi}(x) + \xi \left(u_1^\xi(x) + u_1^{\text{cl},\xi}(x) \right) + \dots$$

u_0 et les u_i^ξ sont solutions d'EDP dans le domaine sans la couche. Les $u_i^{\text{cl},\xi}$ sont des correcteurs de couche limite. Ils dépendent de solutions de problèmes dans la cellule élémentaire, dont nous prouvons l'existence et l'unicité en préliminaire. Enfin, la décroissance exponentielle des correcteurs de couche limite permet d'obtenir des conditions de transmission équivalentes à la couche mince en champ lointain.

4.3.2 Préliminaire

Par changement d'échelle $y := x/\xi$, on introduit la bande $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_+ \cup \Gamma_1 \cup \mathcal{Y}_{\text{cl}} \cup \Gamma_0 \cup \mathcal{Y}_-$, où $\mathcal{Y}_+ = \{(y_1, y_2) \in (0, 1) \times \mathbb{R} : y_2 > f(y_1)\}$, $\Gamma_1 = \{(y_1, f(y_1)), y_1 \in (0, 1)\}$, $\mathcal{Y}_{\text{cl}} = \{(y_1, y_2) \in (0, 1) \times \mathbb{R} : 0 < y_2 < f(y_1)\}$, $\Gamma_0 = (0, 1) \times \{0\}$, et $\mathcal{Y}_- = (0, 1) \times \mathbb{R}^*$.

Pour I un intervalle ouvert non vide de \mathbb{R} , posons $\mathcal{Y}_I := (0, 1) \times I$. On note $\mathcal{C}_\#^\infty(\mathbb{R} \times I)$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times I)$ qui sont 1-périodique par rapport à la première place. $\mathcal{C}_\#^\infty(\mathcal{Y}_I)$ est la restriction à \mathcal{Y}_I des fonctions de $\mathcal{C}_\#^\infty(\mathbb{R} \times I)$. L'espace $L_\#^2(\mathcal{Y}_I)$ est l'adhérence de $\mathcal{C}_\#^\infty(\mathcal{Y}_I)$ dans $L^2(\mathcal{Y}_I)$. L'espace de Sobolev périodique $H_\#^1(\mathcal{Y}_I)$ est l'adhérence de $\mathcal{C}_\#^\infty(\mathcal{Y}_I)$ dans $H^1(\mathcal{Y}_I)$. L'espace des fonctions localement $H_\#^1(\mathcal{Y})$ est $H_{\#, \text{loc}}^1(\mathcal{Y}) = \bigcap_{h>0} H_\#^1(\mathcal{Y}_{(-h, h)})$. On définit enfin les espaces $H_\#^s(0, 1) = \left\{ F \in L_\#^2(0, 1) : \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + k^2)^s |\hat{F}_k|^2 < \infty \right\}$, $s \in \mathbb{R}$, où $L_\#^2(0, 1)$ est l'ensemble des fonctions de $L^2(0, 1)$ prolongées sur \mathbb{R} par périodicité, et \hat{F}_k est le coefficient de Fourier $\hat{F}_k = \langle F, \exp(i2\pi k \cdot) \rangle_{L^2}$.

Dans la bande \mathcal{Y} , on pose

$$A_{\mathcal{Y}}(y) = \frac{1}{\mu^+} \mathbb{1}_{\mathcal{Y}_+}(y) + \frac{1}{\mu^{\text{cl}}} \mathbb{1}_{\mathcal{Y}_{\text{cl}}}(y) + A^* \mathbb{1}_{\mathcal{Y}_-}(y), \quad \varepsilon_{\mathcal{Y}}(y) = \varepsilon^+ \mathbb{1}_{\mathcal{Y}_+}(y) + \varepsilon^{\text{cl}} \mathbb{1}_{\mathcal{Y}_{\text{cl}}}(y) + \varepsilon^* \mathbb{1}_{\mathcal{Y}_-}(y).$$

La normale unitaire à Γ_0 au point $(y, 0)$ que l'on considère est $\nu = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, tandis que la normale unitaire à Γ_1 au point $(y, f(y))$ que l'on considère est $\nu_y = \frac{1}{\sqrt{1+f'(y)^2}} \begin{pmatrix} -f'(y) \\ 1 \end{pmatrix}$.

En vue de justifier l'existence et l'unicité de fonctions que nous allons introduire, nous avons besoin du lemme suivant. Il s'agit d'une généralisation d'un lemme de [23]. Nous en adaptons la preuve au cas d'un milieu inférieur non isotrope.

Lemme 4.1. Soit $F \in L^2_{\sharp}(\mathcal{Y})$ à décroissance exponentielle quand la deuxième variable va à l'infini. On pose $\lambda_k = \frac{2\pi|k|\sqrt{\det A^*}}{t}$. On suppose qu'il existe $M > \sup f$, $C_+, C_- > 0$, $\delta_+ \in [0, 2\pi)$, $\delta_- \in [0, \frac{2\pi\sqrt{\det A^*}}{t})$, et une famille de fonctions régulières (p_k) définies sur $\{|y_2| > M\}$ satisfaisant

$$|p_k(y_2)| \leq C_+ e^{\delta_+ |k|(y_2 - M)}, \quad y_2 > M,$$

$$|p_k(y_2)| \leq C_- e^{\delta_- |k|(y_2 + M)}, \quad y_2 < -M,$$

tels que sur $\{|y_2| > M\}$, F admet le développement en série de Fourier suivant :

$$F(y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \hat{F}_k(M) p_k(y_2) e^{-2\pi|k|(y_2 - M)} e^{i2\pi k y_1}, \quad y_2 \geq M,$$

$$F(y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \hat{F}_k(-M) p_k(y_2) e^{(\lambda_k - i\frac{2\pi k s}{t})(y_2 + M)} e^{i2\pi k y_1}, \quad y_2 \leq -M.$$

Soient g_0 et g_1 deux fonctions suffisamment régulières définies respectivement sur Γ_0 et Γ_1 telles que :

$$\int_{\mathcal{Y}_M} F + \int_{\Gamma_0} g_0 d\sigma + \int_{\Gamma_1} g_1 d\sigma = 0.$$

Alors, il existe un unique couple (Ψ, ψ) avec $\Psi \in H^1_{\sharp, \text{loc}}(\mathcal{Y})$ et $\psi \in \mathbb{R}$ une constante, tel que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot A_{\mathcal{Y}} \nabla \Psi = F, & \text{dans } \mathcal{Y}_+ \cup \mathcal{Y}_{\text{cl}} \cup \mathcal{Y}_-, \\ [\Psi]|_{\Gamma_1} = 0, & \text{sur } \Gamma_1, \\ [\Psi]|_{\Gamma_0} = 0, & \text{sur } \Gamma_0, \\ \left[\partial_{\nu_{A_{\mathcal{Y}}}} \Psi \right]|_{\Gamma_1} = g_1, & \text{sur } \Gamma_1, \\ \left[\partial_{\nu_{A_{\mathcal{Y}}}} \Psi \right]|_{\Gamma_0} = g_0, & \text{sur } \Gamma_0, \\ y_1 \mapsto \Psi(y_1, \cdot), & 1\text{-périodique}, \\ \Psi \longrightarrow 0, & y_2 \rightarrow -\infty, \\ \Psi \longrightarrow \psi, & y_2 \rightarrow +\infty. \end{array} \right.$$

De plus les convergences en $+\infty$ et $-\infty$ sont exponentielles. Ici, $\partial_{\nu_{A_{\mathcal{Y}}}} \Psi(y) := D_y \Psi(y) A \nu_y$.

PREUVE. — Nous allons remplacer le problème considéré par un problème tronqué, dans le domaine borné $\mathcal{Y}_M = \mathcal{Y} \cap \{|y_2| < M\}$, à l'aide d'opérateurs de troncature sur $\Gamma_M = \{y_2 = M\}$ et sur $\Gamma_{-M} = \{y_2 = -M\}$.

Par périodicité, une (éventuelle) solution se décompose en série de Fourier :

$$\Psi(y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\psi}_k(y_2) e^{i2\pi k y_1}, \quad |y_2| \geq M.$$

En exploitant l'EDP, le comportement à l'infini ainsi que les hypothèses sur F , on peut trouver :

$$\hat{\psi}_0(y_2) = \hat{\psi}_0(M), \quad y_2 \geq M,$$

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_k(y_2) = & \left(\hat{\psi}_k(M) + \frac{\hat{F}_k(M)}{4\pi|k|} \int_M^{+\infty} p_k(\tau) e^{-4\pi|k|(\tau - M)} d\tau \right. \\ & \left. - \frac{\hat{F}_k(M)}{4\pi|k|} \int_M^{y_2} p_k(\tau) d\tau \right) e^{-2\pi|k|(y_2 - M)} \\ & - \frac{\hat{F}_k(M)}{4\pi|k|} \int_{y_2}^{+\infty} p_k(\tau) e^{-4\pi|k|(\tau - M)} d\tau e^{2\pi|k|(y_2 - M)}, \quad y_2 \geq M, k \neq 0, \end{aligned}$$

ainsi que

$$\hat{\psi}_0(y_2) = \hat{\psi}_0(-M), \quad y_2 \leq -M,$$

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_k(y_2) = & \left(\hat{\psi}_k(-M) + \frac{\hat{F}_k(-M)}{2\lambda_k} \int_{-\infty}^{-M} p_k(\tau) e^{2\lambda_k(\tau+M)} d\tau \right. \\ & \left. - \frac{\hat{F}_k(-M)}{2\lambda_k} \int_{y_2}^{-M} p_k(\tau) d\tau \right) e^{(\lambda_k - i\frac{2\pi ks}{t})(y_2+M)} \\ & - \frac{\hat{F}_k(-M)}{2\lambda_k} \int_{-\infty}^{y_2} p_k(\tau) e^{2\lambda_k(\tau+M)} d\tau e^{(-\lambda_k - i\frac{2\pi ks}{t})(y_2+M)}, \quad y_2 \leq -M, k \neq 0. \end{aligned}$$

Remarque. Grâce à l'EDP, dans $\{y_2 < -M\}$ et dans $\{y_2 > M\}$, $\hat{\psi}_k$ satisfait une EDO du second ordre à coefficient constant. Pour trouver ces expressions de $\hat{\psi}_k$, nous avons résolu ces EDO par variation des constantes. ■

Introduisons les opérateurs $\mathcal{Q} : H_{\#}^{1/2}(0,1) \longrightarrow H_{\#}^{-1/2}(0,1)$, $\mathcal{T}_M, \mathcal{T}_{-M} : H_{\#}^{-1}(0,1) \longrightarrow L_{\#}^2(0,1)$ définis par :

$$\begin{aligned} \forall u \in H_{\#}^{1/2}(0,1), \quad \mathcal{Q}u(y_1) &= 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} |k| \hat{u}_k e^{i2\pi k y_1}, \\ \forall u \in H_{\#}^{-1}(0,1), \quad \mathcal{T}_M u(y_1) &= 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \hat{u}_k \int_M^{+\infty} p_k(\tau) e^{-4\pi|k|(\tau-M)} d\tau e^{i2\pi k y_1}, \\ \forall u \in H_{\#}^{-1}(0,1), \quad \mathcal{T}_{-M} u(y_1) &= 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \hat{u}_k \int_{-\infty}^{-M} p_k(\tau) e^{2\lambda_k(\tau+M)} d\tau e^{i2\pi k y_1}. \end{aligned}$$

Alors, en notant $\partial_{\nu_{A^*}} \Psi(y) := D_y \Psi(y) A^* \nu_y$, on a :

$$\begin{aligned} (\partial_{y_2} \Psi)|_{\Gamma_M} + \mathcal{Q}(\Psi|_{\Gamma_M}) &= -\mathcal{T}_M(F|_{\Gamma_M}), \\ (\partial_{\nu_{A^*}} \Psi)|_{\Gamma_{-M}} + \sqrt{\det A^*} \mathcal{Q}(\Psi|_{\Gamma_{-M}}) &= -t \mathcal{T}_{-M}(F|_{\Gamma_{-M}}). \end{aligned}$$

Notre problème est équivalent au problème tronqué suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot A_{\mathcal{Y}} \nabla \Psi = F, & \text{dans } \mathcal{Y}_M \cap (\mathcal{Y}_+ \cup \mathcal{Y}_{cl} \cup \mathcal{Y}_-), \\ [\Psi]|_{\Gamma_1} = 0, & \text{sur } \Gamma_1, \\ [\Psi]|_{\Gamma_0} = 0, & \text{sur } \Gamma_0, \\ \left[\partial_{\nu_{A_{\mathcal{Y}}}} \Psi \right]_{\Gamma_1} = g_1, & \text{sur } \Gamma_1, \\ \left[\partial_{\nu_{A_{\mathcal{Y}}}} \Psi \right]_{\Gamma_0} = g_0, & \text{sur } \Gamma_0, \\ (\partial_{y_2} \Psi)|_{\Gamma_M} + \mathcal{Q}(\Psi|_{\Gamma_M}) = -\mathcal{T}_M(F|_{\Gamma_M}), & \\ (\partial_{\nu_{A^*}} \Psi)|_{\Gamma_{-M}} + \sqrt{\det A^*} \mathcal{Q}(\Psi|_{\Gamma_{-M}}) = -t \mathcal{T}_{-M}(F|_{\Gamma_{-M}}), & \\ y_1 \longmapsto \Psi(y_1, \cdot), & \text{1-périodique.} \end{array} \right.$$

Remarque. L'équivalence des problèmes est à comprendre dans le sens suivant :

- La restriction à \mathcal{Y}_M d'une solution du problème initial est une solution de ce problème tronqué.
- Une solution de ce problème tronqué peut être prolongée de façon unique en une solution du problème initial. Le prolongement s'obtient via le développement en série de Fourier (qui n'utilise que la trace de Ψ sur $\Gamma_M \cup \Gamma_{-M}$).

■

La formulation variationnelle de ce problème est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in H_{\#}^1(\mathcal{Y}_M) \text{ tel que} \\ \forall v \in H_{\#}^1(\mathcal{Y}_M), \quad a(u, v) = L(v), \end{array} \right.$$

où

$$a(u, v) = \int_{\mathcal{Y}_M} A_{\mathcal{Y}} \nabla u \cdot \nabla v + \frac{1}{\mu^+} \left\langle \mathcal{Q}(u|_{\Gamma_M}), v|_{\Gamma_M} \right\rangle + \sqrt{\det A^*} \left\langle \mathcal{Q}(u|_{\Gamma_{-M}}), v|_{\Gamma_{-M}} \right\rangle,$$

$$L(v) = - \int_{\mathcal{D}_M} Fv - \int_{\Gamma_0} g_0 v d\sigma - \int_{\Gamma_1} g_1 v d\sigma - \frac{1}{\mu^+} \left\langle \mathcal{T}_M \left(F|_{\Gamma_M} \right), v|_{\Gamma_M} \right\rangle - t \left\langle \mathcal{T}_{-M} \left(F|_{\Gamma_{-M}} \right), v|_{\Gamma_{-M}} \right\rangle.$$

a est bilinéaire continue sur $H_{\sharp}^1(\mathcal{D}_M) \times H_{\sharp}^1(\mathcal{D}_M)$, L est linéaire continue sur $H_{\sharp}^1(\mathcal{D}_M)$. a est coercive sur $H_{\sharp}^1(\mathcal{D}_M)/\mathbb{R}$ par inégalité de Poincaré.

Remarque. Pour assurer la coercivité de a , il faut identifier les fonctions égales à une constante additive près. Autrement dit, on considère le problème suivant dans $H_{\sharp}^1(\mathcal{D}_M)/\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \text{trouver } \dot{u} \in H_{\sharp}^1(\mathcal{D}_M)/\mathbb{R} \text{ tel que} \\ \forall \dot{v} \in H_{\sharp}^1(\mathcal{D}_M)/\mathbb{R}, \quad \dot{a}(\dot{u}, \dot{v}) = \dot{L}(\dot{v}), \end{cases}$$

où $\dot{a}(\dot{u}, \dot{v}) = a(u, v)$, $\dot{L}(\dot{v}) = L(v)$, u et v désignant un représentant respectif de \dot{u} et \dot{v} . Cette définition ne doit pas dépendre des représentants choisis, ce qui revient à avoir les conditions de compatibilité suivantes : $a(u, 1) = a(1, v) = 0$ et $L(1) = 0$. ■

On a $a(u, 1) = a(1, v) = 0$ et d'autre part, par hypothèses sur F , g_0 et g_1 , $L(1) = 0$. On en déduit par Lax-Milgram qu'il existe une unique solution Ψ au problème tronqué, à une constante additive près. Nous pouvons choisir cette constante telle que $\int_0^1 \Psi(\tau, -M) d\tau = \hat{\psi}_0(-M) = 0$. On pose alors $\psi = \hat{\psi}_0(M) = \int_0^1 \Psi(\tau, M) d\tau \in \mathbb{R}$.

Vu l'expression des $\hat{\psi}_k$, on a décroissance exponentielle de $\Psi - \psi$ en $+\infty$ et de Ψ en $-\infty$. □

Ce type de problème-cellule est exploité pour obtenir les correcteurs de couche limite. On se reportera à l'annexe 4.A pour sa résolution numérique.

4.3.3 Développement

Nous commençons par approcher u_{ξ} par u_0 , la solution d'un problème sans couche limite : soit u_0 la solution de

$$\begin{cases} \frac{1}{\mu^+} \Delta u_0 + \omega^2 \varepsilon^+ u_0 = 0, & \text{dans } \mathcal{D}^+, \\ \nabla \cdot A^* \nabla u_0 + \omega^2 \varepsilon^* u_0 = 0, & \text{dans } \mathcal{D}^-, \\ [u_0] = 0, & \text{sur } \gamma_0, \\ \frac{1}{\mu^+} \partial_{x_2} u_0|_{\gamma_0^+} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A^* \nabla u_0|_{\gamma_0^-} = 0, & \text{sur } \gamma_0, \\ + \text{condition de radiation.} \end{cases}$$

Afin de constater (puis de corriger) les erreurs d'approximation comises, posons $v_0^{\xi} := u_{\xi} - u_0$. Alors v_0^{ξ} vérifie

$$\begin{cases} \nabla \cdot A_{\xi} \nabla v_0^{\xi} + \omega^2 \varepsilon_{\xi} v_0^{\xi} = 0, & \text{dans } \mathcal{D}_+^{\xi} \cup \mathcal{D}^-, \\ \frac{1}{\mu^{\text{cl}}} \Delta v_0^{\xi} + \omega^2 \varepsilon_{\xi} v_0^{\xi} = -\frac{1}{\mu^{\text{cl}}} \Delta u_0 - \omega^2 \varepsilon^{\text{cl}} u_0, & \text{dans } \mathcal{D}_{\xi}^{\text{cl}}, \\ \left[v_0^{\xi} \right]_{\gamma_{\xi}} = 0, & \text{sur } \gamma_{\xi}, \\ \left[v_0^{\xi} \right]_{\gamma_0} = 0, & \text{sur } \gamma_0, \\ \left[\partial_{\nu_{A_{\xi}}} v_0^{\xi} \right]_{\gamma_{\xi}} = \left(\frac{1}{\mu^{\text{cl}}} - \frac{1}{\mu^+} \right) \nu \cdot \nabla u_0|_{\gamma_0^+} + \xi \left(\frac{1}{\mu^{\text{cl}}} - \frac{1}{\mu^+} \right) f(x/\xi) \nu \cdot \partial_{x_2} (\nabla u_0)|_{\gamma_0^+} + \mathcal{O}(\xi^2), & \text{sur } \gamma_{\xi}, \\ \left[\partial_{\nu_{A_{\xi}}} v_0^{\xi} \right]_{\gamma_0} = \left(\frac{1}{\mu^+} - \frac{1}{\mu^{\text{cl}}} \right) \nu \cdot \nabla u_0|_{\gamma_0^+}, & \text{sur } \gamma_0, \\ + \text{condition de radiation,} \end{cases}$$

$$\text{avec } \partial_{x_2} (\nabla u_0)|_{\gamma_0^+} = \begin{pmatrix} \partial_{x_2 x_1}^2 u_0|_{\gamma_0^+} \\ (-k^{+2} - \partial_{x_1^2}^2) u_0|_{\gamma_0^+} \end{pmatrix}.$$

Sur γ_0 , $\nu = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, tandis que sur γ_ξ , $\nu_x = \frac{1}{\sqrt{1+f'(x/\xi)^2}} \begin{pmatrix} -f'(x/\xi) \\ 1 \end{pmatrix}$.

Introduisons donc un correcteur de couche limite, $u_0^{\text{cl},\xi}$, pour corriger l'erreur d'approximation comise sur les sauts des dérivées normales. Plus précisément, cherchons $u_0^{\text{cl},\xi}$ tel que $w_0^\xi := u_\xi - (u_0 + u_0^{\text{cl},\xi})$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot A_\xi \nabla w_0^\xi + \omega^2 \varepsilon_\xi w_0^\xi = \mathcal{O}(1), & \text{dans } \mathcal{D}_+^\xi \cup \mathcal{D}_\xi^{\text{cl}} \cup \mathcal{D}^-, \\ \left[w_0^\xi \right]_{\gamma_\xi} = \mathcal{O}(\xi), & \text{sur } \gamma_\xi, \\ \left[w_0^\xi \right]_{\gamma_0} = \mathcal{O}(\xi), & \text{sur } \gamma_0, \\ \left[\partial_{\nu_{A_\xi}} w_0^\xi \right]_{\gamma_\xi} = \mathcal{O}(\xi), & \text{sur } \gamma_\xi, \\ \left[\partial_{\nu_{A_\xi}} w_0^\xi \right]_{\gamma_0} = \mathcal{O}(\xi), & \text{sur } \gamma_0, \\ + \text{condition de radiation.} \end{array} \right.$$

Autrement dit, cherchons un $u_0^{\text{cl},\xi}$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot A_\xi \nabla u_0^{\text{cl},\xi} + \omega^2 \varepsilon_\xi u_0^{\text{cl},\xi} = \mathcal{O}(1), & \text{dans } \mathcal{D}_+^\xi \cup \mathcal{D}_\xi^{\text{cl}} \cup \mathcal{D}^-, \\ \left[u_0^{\text{cl},\xi} \right]_{\gamma_\xi} = \mathcal{O}(\xi), & \text{sur } \gamma_\xi, \\ \left[u_0^{\text{cl},\xi} \right]_{\gamma_0} = \mathcal{O}(\xi), & \text{sur } \gamma_0, \\ \left[\partial_{\nu_{A_\xi}} u_0^{\text{cl},\xi} \right]_{\gamma_\xi} = \left(\frac{1}{\mu^{\text{cl}}} - \frac{1}{\mu^+} \right) \nu \cdot \nabla u_0|_{\gamma_0^+} + \mathcal{O}(\xi), & \text{sur } \gamma_\xi, \\ \left[\partial_{\nu_{A_\xi}} u_0^{\text{cl},\xi} \right]_{\gamma_0} = \left(\frac{1}{\mu^+} - \frac{1}{\mu^{\text{cl}}} \right) \nu \cdot \nabla u_0|_{\gamma_0^+} + \mathcal{O}(\xi), & \text{sur } \gamma_0, \\ + \text{condition de radiation.} \end{array} \right.$$

En vue de définir un $u_0^{\text{cl},\xi}$ convenable, on introduit $(\Psi_0, \psi_0) \in H_{\#, \text{loc}}^1(\mathcal{Y})^2 \times \mathbb{R}^2$ l'unique solution de :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot A_{\mathcal{Y}} \nabla \Psi_0 = 0, & \text{dans } \mathcal{Y}_+ \cup \mathcal{Y}_{\text{cl}} \cup \mathcal{Y}_-, \\ [\Psi_0]_{\Gamma_1} = 0, & \text{sur } \Gamma_1, \\ [\Psi_0]_{\Gamma_0} = 0, & \text{sur } \Gamma_0, \\ \left[\partial_{\nu_{A_{\mathcal{Y}}}} \Psi_0 \right]_{\Gamma_1} = \left(\frac{1}{\mu^{\text{cl}}} - \frac{1}{\mu^+} \right) \nu, & \text{sur } \Gamma_1, \\ \left[\partial_{\nu_{A_{\mathcal{Y}}}} \Psi_0 \right]_{\Gamma_0} = \left(\frac{1}{\mu^+} - \frac{1}{\mu^{\text{cl}}} \right) \nu, & \text{sur } \Gamma_0, \\ y_1 \mapsto \Psi_0(y_1, \cdot), & 1\text{-périodique,} \\ \Psi_0 \longrightarrow 0, & y_2 \rightarrow -\infty, \\ \Psi_0 \longrightarrow \psi_0, & y_2 \rightarrow +\infty. \end{array} \right.$$

Le Lemme 4.1 nous permet d'assurer l'existence et l'unicité de la solution de ce problème.

On pose alors

$$u_0^{\text{cl},\xi}(x) = \xi \left(\Psi_0 \left(\frac{x}{\xi} \right) - \psi_0 \right) \cdot \nabla u_0|_{\gamma_0^+} \mathbb{1}_{\mathcal{D}^+}(x) + \xi \Psi_0 \left(\frac{x}{\xi} \right) \cdot \nabla u_0|_{\gamma_0^+} \mathbb{1}_{\mathcal{D}^-}(x).$$

Alors $u_0^{\text{cl},\xi}$ satisfait bien ce que l'on voulait. En effet :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot A_\xi \nabla w_0^\xi + \omega^2 \varepsilon_\xi w_0^\xi = - \begin{pmatrix} \frac{2}{\mu^+} & 0 \end{pmatrix} \nabla_y \Psi_0(x/\xi) \partial_{x_1} (\nabla u_0|_{\gamma_0^+}) + \mathcal{O}(\xi), & \text{dans } \mathcal{D}_+^\xi, \\ \nabla \cdot A_\xi \nabla w_0^\xi + \omega^2 \varepsilon_\xi w_0^\xi = - \begin{pmatrix} \frac{2}{\mu^{\text{cl}}} & 0 \end{pmatrix} \nabla_y \Psi_0(x/\xi) \partial_{x_1} (\nabla u_0|_{\gamma_0^+}) \\ \quad - \omega^2 \left(\varepsilon^{\text{cl}} - \varepsilon^+ \frac{\mu^+}{\mu^{\text{cl}}} \right) u_0|_{\gamma_0^+} + \mathcal{O}(\xi), & \text{dans } \mathcal{D}_\xi^{\text{cl}}, \\ \nabla \cdot A_\xi \nabla w_0^\xi + \omega^2 \varepsilon_\xi w_0^\xi = - (2r \quad 2s) \nabla_y \Psi_0(x/\xi) \partial_{x_1} (\nabla u_0|_{\gamma_0^+}) + \mathcal{O}(\xi), & \text{dans } \mathcal{D}^-, \\ \left[w_0^\xi \right]_{\gamma_\xi} = 0, & \text{sur } \gamma_\xi, \\ \left[w_0^\xi \right]_{\gamma_0} = \xi \psi_0 \cdot \nabla u_0|_{\gamma_0^+}, & \text{sur } \gamma_0, \\ \left[\partial_{\nu_{A_\xi}} w_0^\xi \right]_{\gamma_\xi} = \xi \left(\frac{1}{\mu^{\text{cl}}} - \frac{1}{\mu^+} \right) f(x/\xi) \nu \cdot \begin{pmatrix} \partial_{x_2 x_1}^2 u_0|_{\gamma_0^+} \\ (-k^{+2} - \partial_{x_1^2}^2) u_0|_{\gamma_0^+} \end{pmatrix} \\ \quad + \xi \left(\frac{1}{\mu^{\text{cl}}} - \frac{1}{\mu^+} \right) \nu_1 (\Psi_0|_{\Gamma_1} - \psi_0) \cdot \partial_{x_1} (\nabla u_0|_{\gamma_0^+})|_{\gamma_0} + \mathcal{O}(\xi^2), & \text{sur } \gamma_\xi, \\ \left[\partial_{\nu_{A_\xi}} w_0^\xi \right]_{\gamma_0} = \xi s \Psi_0|_{\Gamma_0} (x/\xi) \cdot \partial_{x_1} (\nabla u_0|_{\gamma_0^+})|_{\gamma_0}, & \text{sur } \gamma_0, \\ \text{+condition de radiation.} \end{array} \right.$$

On introduit désormais u_1 , solution d'un problème dans le domaine sans la couche, tel que ξu_1 corrige le saut de $u_0 + u_0^{\text{cl},\xi}$ sur γ_0 . Autrement dit, cherchons u_1 solution d'un problème de type

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\mu^+} \Delta u_1 + \omega^2 \varepsilon^+ u_1 = 0, & \text{dans } \mathcal{D}^+, \\ \nabla \cdot A^* \nabla u_1 + \omega^2 \varepsilon^* u_1 = 0, & \text{dans } \mathcal{D}^-, \\ [u_1] = F_1, & \text{sur } \gamma_0, \\ \frac{1}{\mu^+} \partial_{x_2} u_1|_{\gamma_0^+} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A^* \nabla u_1|_{\gamma_0^-} = G_1, & \text{sur } \gamma_0, \\ \text{+condition de radiation,} \end{array} \right.$$

avec F_1 tel que $\xi[u_1] = \xi F_1 = [w_0^\xi] + \mathcal{O}(\xi^2)$.

Il convient de choisir

$$F_1 = \psi_0 \cdot \nabla u_0|_{\gamma_0^+}.$$

Quant à G_1 , il sera fixé ultérieurement, afin de satisfaire des conditions de compatibilité, lors de la définition du terme correcteur suivant.

Afin de constater les erreurs d'approximation comises, posons $v_1^\xi := u_\xi - (u_0 + u_0^{\text{cl},\xi} + \xi u_1)$. Alors v_1^ξ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot A_\xi \nabla v_1^\xi + \omega^2 \varepsilon_\xi v_1^\xi = - \begin{pmatrix} \frac{2}{\mu^+} & 0 \end{pmatrix} \nabla_y \Psi_0(x/\xi) \partial_{x_1} (\nabla u_0|_{\gamma_0^+}) + \mathcal{O}(\xi), & \text{dans } \mathcal{D}_+^\xi, \\ \nabla \cdot A_\xi \nabla v_1^\xi + \omega^2 \varepsilon_\xi v_1^\xi = - \begin{pmatrix} \frac{2}{\mu^{\text{cl}}} & 0 \end{pmatrix} \nabla_y \Psi_0(x/\xi) \partial_{x_1} (\nabla u_0|_{\gamma_0^+}) \\ \quad - \omega^2 \left(\varepsilon^{\text{cl}} - \varepsilon^+ \frac{\mu^+}{\mu^{\text{cl}}} \right) u_0|_{\gamma_0^+} + \mathcal{O}(\xi), & \text{dans } \mathcal{D}_\xi^{\text{cl}}, \\ \nabla \cdot A_\xi \nabla v_1^\xi + \omega^2 \varepsilon_\xi v_1^\xi = - (2r \quad 2s) \nabla_y \Psi_0(x/\xi) \partial_{x_1} (\nabla u_0|_{\gamma_0^+}) + \mathcal{O}(\xi), & \text{dans } \mathcal{D}^-, \\ \left[v_1^\xi \right]_{\gamma_\xi} = 0, & \text{sur } \gamma_\xi, \\ \left[v_1^\xi \right]_{\gamma_0} = 0, & \text{sur } \gamma_0, \\ \left[\partial_{\nu_{A_\xi}} v_1^\xi \right]_{\gamma_\xi} = \xi \left(\frac{1}{\mu^{\text{cl}}} - \frac{1}{\mu^+} \right) f(x/\xi) \nu \cdot \begin{pmatrix} \partial_{x_2 x_1}^2 u_0|_{\gamma_0^+} \\ (-k^{+2} - \partial_{x_1^2}^2) u_0|_{\gamma_0^+} \end{pmatrix} \\ \quad + \xi \left(\frac{1}{\mu^{\text{cl}}} - \frac{1}{\mu^+} \right) \nu_1 (\Psi_0|_{\Gamma_1} - \psi_0) \cdot \partial_{x_1} (\nabla u_0|_{\gamma_0^+})|_{\gamma_0} \\ \quad + \xi \left(\frac{1}{\mu^{\text{cl}}} - \frac{1}{\mu^+} \right) \nu \cdot \nabla u_1|_{\gamma_0^+} + \mathcal{O}(\xi^2), & \text{sur } \gamma_\xi, \\ \left[\partial_{\nu_{A_\xi}} v_1^\xi \right]_{\gamma_0} = \xi s \Psi_0|_{\Gamma_0} (x/\xi) \cdot \partial_{x_1} (\nabla u_0|_{\gamma_0^+})|_{\gamma_0} \\ \quad + \xi \left(\frac{1}{\mu^+} - \frac{1}{\mu^{\text{cl}}} \right) \nu \cdot \nabla u_1|_{\gamma_0^+} - \xi G_1 + \mathcal{O}(\xi^2), & \text{sur } \gamma_0, \\ \text{+condition de radiation.} \end{array} \right.$$

Introduisons un correcteur de couche limite, $u_1^{\text{cl},\xi}$, pour corriger à l'ordre supérieur l'erreur d'approximation comise sur les sauts des dérivées normales, ainsi que l'EDP. Plus précisément, cherchons $u_1^{\text{cl},\xi}$ est tel que $w_1^\xi := u_\xi - (u_0 + u_0^{\text{cl},\xi} + \xi(u_1 + u_1^{\text{cl},\xi}))$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot A_\xi \nabla w_1^\xi + \omega^2 \varepsilon_\xi w_1^\xi = \mathcal{O}(\xi), & \text{dans } \mathcal{D}_+^\xi \cup \mathcal{D}_\xi^{\text{cl}} \cup \mathcal{D}^-, \\ \left[w_1^\xi \right] \Big|_{\gamma_\xi} = \mathcal{O}(\xi^2), & \text{sur } \gamma_\xi, \\ \left[w_1^\xi \right] \Big|_{\gamma_0} = \mathcal{O}(\xi^2), & \text{sur } \gamma_0, \\ \left[\partial_{\nu_{A_\xi}} w_1^\xi \right] \Big|_{\gamma_\xi} = \mathcal{O}(\xi^2), & \text{sur } \gamma_\xi, \\ \left[\partial_{\nu_{A_\xi}} w_1^\xi \right] \Big|_{\gamma_0} = \mathcal{O}(\xi^2), & \text{sur } \gamma_0, \\ + \text{condition de radiation.} \end{array} \right.$$

Autrement dit, on cherche un $u_1^{\text{cl},\xi}$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \xi \left(\nabla \cdot A_\xi \nabla u_1^{\text{cl},\xi} + \omega^2 \varepsilon_\xi u_1^{\text{cl},\xi} \right) = - \left(\frac{2}{\mu^+} \quad 0 \right) \nabla_y \Psi_0(x/\xi) \partial_{x_1} (\nabla u_0|_{\gamma_0^+}) + \mathcal{O}(\xi), & \text{dans } \mathcal{D}_+^\xi, \\ \xi \left(\nabla \cdot A_\xi \nabla u_1^{\text{cl},\xi} + \omega^2 \varepsilon_\xi u_1^{\text{cl},\xi} \right) = - \left(\frac{2}{\mu^{\text{cl}}} \quad 0 \right) \nabla_y \Psi_0(x/\xi) \partial_{x_1} (\nabla u_0|_{\gamma_0^+}) \\ \quad - \omega^2 (\varepsilon^{\text{cl}} - \varepsilon^+ \frac{\mu^+}{\mu^{\text{cl}}}) u_0|_{\gamma_0^+} + \mathcal{O}(\xi), & \text{dans } \mathcal{D}_\xi^{\text{cl}}, \\ \xi \left(\nabla \cdot A_\xi \nabla u_1^{\text{cl},\xi} + \omega^2 \varepsilon_\xi u_1^{\text{cl},\xi} \right) = - (2r \quad 2s) \nabla_y \Psi_0(x/\xi) \partial_{x_1} (\nabla u_0|_{\gamma_0^+}) + \mathcal{O}(\xi), & \text{dans } \mathcal{D}^-, \\ \xi \left[u_1^{\text{cl},\xi} \right] \Big|_{\gamma_\xi} = \mathcal{O}(\xi^2), & \text{sur } \gamma_\xi, \\ \xi \left[u_1^{\text{cl},\xi} \right] \Big|_{\gamma_0} = \mathcal{O}(\xi^2), & \text{sur } \gamma_0, \\ \xi \left[\partial_{\nu_{A_\xi}} u_1^{\text{cl},\xi} \right] \Big|_{\gamma_\xi} = \xi \left(\frac{1}{\mu^{\text{cl}}} - \frac{1}{\mu^+} \right) f(x/\xi) \nu \cdot \left(\begin{array}{l} \partial_{x_2 x_1}^2 u_0|_{\gamma_0^+} \\ (-k^{+2} - \partial_{x_1^2}^2) u_0|_{\gamma_0^+} \end{array} \right) \\ \quad + \xi \left(\frac{1}{\mu^{\text{cl}}} - \frac{1}{\mu^+} \right) \nu_1 (\Psi_0|_{\Gamma_1} - \psi_0) \cdot \partial_{x_1} (\nabla u_0|_{\gamma_0^+}) \Big|_{\gamma_0} \\ \quad + \xi \left(\frac{1}{\mu^{\text{cl}}} - \frac{1}{\mu^+} \right) \nu \cdot \nabla u_1|_{\gamma_0^+} + \mathcal{O}(\xi^2), & \text{sur } \gamma_\xi, \\ \xi \left[\partial_{\nu_{A_\xi}} u_1^{\text{cl},\xi} \right] \Big|_{\gamma_0} = \xi s \Psi_0|_{\Gamma_0}(x/\xi) \cdot \partial_{x_1} (\nabla u_0|_{\gamma_0^+}) \Big|_{\gamma_0} \\ \quad + \xi \left(\frac{1}{\mu^+} - \frac{1}{\mu^{\text{cl}}} \right) \nu \cdot \nabla u_1|_{\gamma_0^+} - \xi G_1 + \mathcal{O}(\xi^2), & \text{sur } \gamma_0, \\ + \text{condition de radiation.} \end{array} \right.$$

En vue de définir un $u_1^{\text{cl},\xi}$ convenable, on introduit $(\Psi_1^{(1)}, \psi_1^{(1)}), (\Psi_1^{(2)}, \psi_1^{(2)}) \in H_{\sharp, \text{loc}}^1(\mathcal{D})^2 \times \mathbb{R}^2$ et $(\Psi_1^{(3)}, \psi_1^{(3)}) \in H_{\sharp, \text{loc}}^1(\mathcal{D}) \times \mathbb{R}$ les uniques solutions respectives de :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot A_{\mathcal{D}} \nabla \Psi_1^{(1)} = - \left(\frac{2}{\mu^+} \quad 0 \right) \nabla_y \Psi_0, & \text{dans } \mathcal{D}_+, \\ \nabla \cdot A_{\mathcal{D}} \nabla \Psi_1^{(1)} = - \left(\frac{2}{\mu^{\text{cl}}} \quad 0 \right) \nabla_y \Psi_0, & \text{dans } \mathcal{D}_{\text{cl}}, \\ \nabla \cdot A_{\mathcal{D}} \nabla \Psi_1^{(1)} = - (2r \quad 2s) \nabla_y \Psi_0, & \text{dans } \mathcal{D}_-, \\ \left[\Psi_1^{(1)} \right] \Big|_{\Gamma_1} = 0, & \text{sur } \Gamma_1, \\ \left[\Psi_1^{(1)} \right] \Big|_{\Gamma_0} = 0, & \text{sur } \Gamma_0, \\ \left[\partial_{\nu_{A_{\mathcal{D}}}} \Psi_1^{(1)} \right] \Big|_{\Gamma_1} = \left(\frac{1}{\mu^{\text{cl}}} - \frac{1}{\mu^+} \right) \nu_1 (\Psi_0|_{\Gamma_1} - \psi_0), & \text{sur } \Gamma_1, \\ \left[\partial_{\nu_{A_{\mathcal{D}}}} \Psi_1^{(1)} \right] \Big|_{\Gamma_0} = s \Psi_0|_{\Gamma_0} - G_1^{(1)}, & \text{sur } \Gamma_0, \\ y_1 \mapsto \Psi_1^{(1)}(y_1, \cdot), & \text{1-périodique,} \\ \Psi_1^{(1)} \longrightarrow 0, & y_2 \rightarrow -\infty, \\ \Psi_1^{(1)} \longrightarrow \psi_1^{(1)}, & y_2 \rightarrow +\infty, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot A_{\mathcal{Y}} \nabla \Psi_1^{(2)} = 0, & \text{dans } \mathcal{Y}_+ \cup \mathcal{Y}_{\text{cl}} \cup \mathcal{Y}_-, \\ \left[\Psi_1^{(2)} \right]_{\Gamma_1} = 0, & \text{sur } \Gamma_1, \\ \left[\Psi_1^{(2)} \right]_{\Gamma_0} = 0, & \text{sur } \Gamma_0, \\ \left[\partial_{\nu_{A_{\mathcal{Y}}}} \Psi_1^{(2)} \right]_{\Gamma_1} = \left(\frac{1}{\mu^{\text{cl}}} - \frac{1}{\mu^+} \right) f \nu, & \text{sur } \Gamma_1, \\ \left[\partial_{\nu_{A_{\mathcal{Y}}}} \Psi_1^{(2)} \right]_{\Gamma_0} = -G_1^{(2)}, & \text{sur } \Gamma_0, \\ y_1 \mapsto \Psi_1^{(2)}(y_1, \cdot), & \text{1-périodique,} \\ \Psi_1^{(2)} \longrightarrow 0, & y_2 \rightarrow -\infty, \\ \Psi_1^{(2)} \longrightarrow \psi_1^{(2)}, & y_2 \rightarrow +\infty, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot A_{\mathcal{Y}} \nabla \Psi_1^{(3)} = 0, & \text{dans } \mathcal{Y}_+ \cup \mathcal{Y}_-, \\ \nabla \cdot A_{\mathcal{Y}} \nabla \Psi_1^{(3)} = 1, & \text{dans } \mathcal{Y}_{\text{cl}}, \\ \left[\Psi_1^{(3)} \right]_{\Gamma_1} = 0, & \text{sur } \Gamma_1, \\ \left[\Psi_1^{(3)} \right]_{\Gamma_0} = 0, & \text{sur } \Gamma_0, \\ \left[\partial_{\nu_{A_{\mathcal{Y}}}} \Psi_1^{(3)} \right]_{\Gamma_1} = 0, & \text{sur } \Gamma_1, \\ \left[\partial_{\nu_{A_{\mathcal{Y}}}} \Psi_1^{(3)} \right]_{\Gamma_0} = -G_1^{(3)}, & \text{sur } \Gamma_0, \\ y_1 \mapsto \Psi_1^{(3)}(y_1, \cdot), & \text{1-périodique,} \\ \Psi_1^{(3)} \longrightarrow 0, & y_2 \rightarrow -\infty, \\ \Psi_1^{(3)} \longrightarrow \psi_1^{(3)}, & y_2 \rightarrow +\infty. \end{array} \right.$$

Le Lemme 4.1 nous assure l'existence et l'unicité de la solution à ces équations, pourvu que $G_1^{(1)}$, $G_1^{(2)}$ et $G_1^{(3)}$ satisfassent les conditions de compatibilité de ces équations :

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathcal{Y}_+} \text{D}\Psi_0(y) \begin{pmatrix} \frac{2}{\mu^+} \\ 0 \end{pmatrix} dy - \int_{\mathcal{Y}_{\text{cl}}} \text{D}\Psi_0(y) \begin{pmatrix} \frac{2}{\mu^{\text{cl}}} \\ 0 \end{pmatrix} dy - \int_{\mathcal{Y}_-} \text{D}\Psi_0(y) \begin{pmatrix} 2r \\ 2s \end{pmatrix} dy \\ & + \int_{\Gamma_1} \left(\frac{1}{\mu^{\text{cl}}} - \frac{1}{\mu^+} \right) \nu_1 (\Psi_0|_{\Gamma_1} - \psi_0) d\sigma + \int_{\Gamma_0} \left(s \Psi_0|_{\Gamma_0} - G_1^{(1)} \right) d\sigma = 0, \\ & \int_{\Gamma_1} \left(\frac{1}{\mu^{\text{cl}}} - \frac{1}{\mu^+} \right) f \nu d\sigma - \int_{\Gamma_0} G_1^{(2)} d\sigma = 0, \\ & \int_{\mathcal{Y}_{\text{cl}}} 1 dy - \int_{\Gamma_0} G_1^{(3)} d\sigma = 0. \end{aligned}$$

On peut, par exemple, choisir les $G_1^{(i)}$ constant. Ainsi, après simplification (en utilisant la périodicité et la formule de Green) :

$$\begin{aligned} G_1^{(1)} &= -s \int_{\Gamma_0} \Psi_0|_{\Gamma_0} d\sigma + \left(\frac{1}{\mu^+} - \frac{1}{\mu^{\text{cl}}} \right) \int_{\Gamma_1} \nu_1 \Psi_0|_{\Gamma_1} d\sigma \\ &= -s \int_0^1 \Psi_0(\tau, 0) d\tau + \left(\frac{1}{\mu^{\text{cl}}} - \frac{1}{\mu^+} \right) \int_0^1 \Psi_0(\tau, f(\tau)) f'(\tau) d\tau, \\ G_1^{(2)} &= \left(\frac{1}{\mu^{\text{cl}}} - \frac{1}{\mu^+} \right) \bar{f} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ G_1^{(3)} &= \int_0^1 f. \end{aligned}$$

On choisit finalement G_1 de la façon suivante :

$$G_1 = G_1^{(1)} \cdot \partial_{x_1} (\nabla u_0|_{\gamma_0^+}) \Big|_{\gamma_0} + G_1^{(2)} \cdot \begin{pmatrix} \partial_{x_2 x_1}^2 u_0|_{\gamma_0^+} \\ (-k^{+2} - \partial_{x_1^2}^2) u_0|_{\gamma_0^+} \end{pmatrix} + \omega^2 \left(\varepsilon^{\text{cl}} - \varepsilon^+ \frac{\mu^+}{\mu^{\text{cl}}} \right) G_1^{(3)} u_0|_{\gamma_0^+}.$$

Posons alors

$$\begin{aligned}
 u_1^{\text{cl},\xi} = \xi \Big\{ & \left(\Psi_0 \left(\frac{x}{\xi} \right) - \psi_0 \right) \cdot \nabla u_1|_{\gamma_0^+} + \left(\Psi_1^{(1)} \left(\frac{x}{\xi} \right) - \psi_1^{(1)} \right) \cdot \partial_{x_1} (\nabla u_0|_{\gamma_0^+}) \Big|_{\gamma_0} \\
 & + \left(\Psi_1^{(2)} \left(\frac{x}{\xi} \right) - \psi_1^{(2)} \right) \cdot \begin{pmatrix} \partial_{x_2 x_1}^2 u_0|_{\gamma_0^+} \\ (-k^{+2} - \partial_{x_1^2}^2) u_0|_{\gamma_0^+} \end{pmatrix} \\
 & + \omega^2 \left(\varepsilon^{\text{cl}} - \varepsilon + \frac{\mu^+}{\mu^{\text{cl}}} \right) \left(\Psi_1^{(3)} \left(\frac{x}{\xi} \right) - \psi_1^{(3)} \right) u_0|_{\gamma_0^+} \Big\} \mathbb{1}_{\mathcal{D}^+}(x) \\
 + \xi \Big\{ & \Psi_0 \left(\frac{x}{\xi} \right) \cdot \nabla u_1|_{\gamma_0^+} + \Psi_1^{(1)} \left(\frac{x}{\xi} \right) \cdot \partial_{x_1} (\nabla u_0|_{\gamma_0^+}) \Big|_{\gamma_0} \\
 & + \Psi_1^{(2)} \left(\frac{x}{\xi} \right) \cdot \begin{pmatrix} \partial_{x_2 x_1}^2 u_0|_{\gamma_0^+} \\ (-k^{+2} - \partial_{x_1^2}^2) u_0|_{\gamma_0^+} \end{pmatrix} \\
 & + \omega^2 \left(\varepsilon^{\text{cl}} - \varepsilon + \frac{\mu^+}{\mu^{\text{cl}}} \right) \Psi_1^{(3)} \left(\frac{x}{\xi} \right) u_0|_{\gamma_0^+} \Big\} \mathbb{1}_{\mathcal{D}^-}(x).
 \end{aligned}$$

On peut vérifier par le calcul que $u_1^{\text{cl},\xi}$ convient.

Nous avons donc obtenu le développement suivant :

$$u_\xi(x) = u_0(x) + u_0^{\text{cl},\xi}(x) + \xi \left(u_1^\xi(x) + u_1^{\text{cl},\xi}(x) \right) + \dots,$$

où les correcteurs de couche $u_i^{\text{cl},\xi}$ sont à décroissance exponentielle.

4.3.4 Conditions de transmission

Notre étude nous permet d'avoir des conditions de transmission remplaçant la couche. Du fait de la décroissance exponentielle des correcteurs $u_0^{\text{cl},\xi}$ et $u_1^{\text{cl},\xi}$, pourvu que l'on ne soit pas trop proche de la couche, on peut approcher u_ξ par $u_0 + \xi u_1$ qui fournit alors des conditions de transmission. Enfin, on approche $u_0 + \xi u_1$ par \tilde{u}_ξ solution du problème :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\mu^+} \Delta \tilde{u}_\xi + \omega^2 \varepsilon^+ \tilde{u}_\xi = 0, & \text{dans } \mathcal{D}^+, \\ \nabla \cdot A^* \nabla \tilde{u}_\xi + \omega^2 \varepsilon^* \tilde{u}_\xi = 0, & \text{dans } \mathcal{D}^-, \\ [\tilde{u}_\xi] = \xi \psi_0 \cdot \nabla \tilde{u}_\xi|_{\gamma_0^+}, & \text{sur } \gamma_0, \\ \frac{1}{\mu^+} \partial_{x_2} \tilde{u}_\xi|_{\gamma_0^+} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A^* \nabla \tilde{u}_\xi|_{\gamma_0^-} = \xi \left(G_1^{(1)} \cdot \partial_{x_1} (\nabla \tilde{u}_\xi|_{\gamma_0^+}) \Big|_{\gamma_0} + G_1^{(2)} \cdot \begin{pmatrix} \partial_{x_2 x_1}^2 \tilde{u}_\xi|_{\gamma_0^+} \\ (-k^{+2} - \partial_{x_1^2}^2) \tilde{u}_\xi|_{\gamma_0^+} \end{pmatrix} \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + \omega^2 \left(\varepsilon^{\text{cl}} - \varepsilon + \frac{\mu^+}{\mu^{\text{cl}}} \right) G_1^{(3)} \tilde{u}_\xi|_{\gamma_0^+} \right), & \text{sur } \gamma_0, \\ \text{+condition de radiation.} & \end{array} \right.$$

4.4 Synthèse

La solution du problème modèle (3.1) peut être approchée par U solution d'un problème dans deux demi-espaces homogènes, avec des conditions de transmission à l'interface :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\mu^+} \Delta U + \omega^2 \varepsilon^+ U = 0, & \text{dans } \mathcal{D}^+, \\ \nabla \cdot A^* \nabla U + \omega^2 \varepsilon^* U = 0, & \text{dans } \mathcal{D}^-, \\ [U] = \xi \psi_0 \cdot \nabla U|_{\gamma_0^+}, & \text{sur } \gamma_0, \\ \frac{1}{\mu^+} \partial_{x_2} U|_{\gamma_0^+} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A^* \nabla U|_{\gamma_0^-} = \xi \left(G_1^{(1)} \cdot \partial_{x_1} (\nabla U|_{\gamma_0^+}) \Big|_{\gamma_0} + G_1^{(2)} \cdot \begin{pmatrix} \partial_{x_2 x_1}^2 U|_{\gamma_0^+} \\ (-k^{+2} - \partial_{x_1^2}^2) U|_{\gamma_0^+} \end{pmatrix} \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + \omega^2 \left(\varepsilon^{\text{cl}} - \varepsilon + \frac{\mu^+}{\mu^{\text{cl}}} \right) G_1^{(3)} U|_{\gamma_0^+} \right), & \text{sur } \gamma_0, \\ \text{+condition de radiation.} & \end{array} \right. \tag{4.2}$$

Les paramètres effectifs du milieu inférieur sont donnés par :

$$A^* = \frac{1}{|Y|} \int_Y \frac{1}{\mu_Y(y)} (\mathbf{I} - \nabla \chi(y)) dy, \quad \varepsilon^* = \frac{1}{|Y|} \int_Y \varepsilon_Y(y) dy = \frac{|B|}{|Y|} \varepsilon_B + \left(1 - \frac{|B|}{|Y|}\right) \varepsilon, \quad (4.3)$$

où χ est la solution Y -périodique à moyenne nulle du problème-cellule :

$$\nabla_y \cdot \frac{1}{\mu_Y(y)} \nabla_y \chi(y) = \nabla_y \cdot \frac{1}{\mu_Y(y)} \mathbf{I}, \quad y \in Y. \quad (4.4)$$

Concernant les conditions de transmission, les coefficients sont donnés par :

$$G_1^{(1)} = -s \int_{\Gamma_0} \Psi_0|_{\Gamma_0} d\sigma + \left(\frac{1}{\mu^+} - \frac{1}{\mu^{\text{cl}}} \right) \int_{\Gamma_1} \nu_1 \Psi_0|_{\Gamma_1} d\sigma \quad (4.5)$$

$$G_1^{(2)} = \left(\frac{1}{\mu^{\text{cl}}} - \frac{1}{\mu^+} \right) \int_0^1 f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

$$G_1^{(3)} = \int_0^1 f, \quad (4.7)$$

et enfin (Ψ_0, ψ_0) est solution du problème-cellule :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot A_{\mathcal{Y}} \nabla \Psi_0 = 0, & \text{dans } \mathcal{Y}_+ \cup \mathcal{Y}_{\text{cl}} \cup \mathcal{Y}_-, \\ [\Psi_0]|_{\Gamma_1} = 0, & \text{sur } \Gamma_1, \\ [\Psi_0]|_{\Gamma_0} = 0, & \text{sur } \Gamma_0, \\ \left[\partial_{\nu_{A_{\mathcal{Y}}}} \Psi_0 \right]|_{\Gamma_1} = \left(\frac{1}{\mu^{\text{cl}}} - \frac{1}{\mu^+} \right) \nu, & \text{sur } \Gamma_1, \\ \left[\partial_{\nu_{A_{\mathcal{Y}}}} \Psi_0 \right]|_{\Gamma_0} = \left(\frac{1}{\mu^+} - \frac{1}{\mu^{\text{cl}}} \right) \nu, & \text{sur } \Gamma_0, \\ y_1 \mapsto \Psi_0(y_1, \cdot), & \text{1-périodique,} \\ \Psi_0 \longrightarrow 0, & y_2 \rightarrow -\infty, \\ \Psi_0 \longrightarrow \psi_0, & y_2 \rightarrow +\infty. \end{array} \right. \quad (4.8)$$

Pour simplifier l'écriture, dans la suite de cette partie, on notera plutôt :

$$\mathcal{A} := A^*, \quad \varepsilon^- := \varepsilon^*, \quad \psi := \xi \psi_0, \quad \varphi_1 := \xi G_1^{(1)}, \quad \varphi_2 := \xi G_1^{(2)}, \quad \varphi_3 := \xi \omega^2 \left(\varepsilon^{\text{cl}} - \varepsilon^+ \frac{\mu^+}{\mu^{\text{cl}}} \right) G_1^{(3)}. \quad (4.9)$$

4.A Résolution numérique des problèmes de cellule

4.A.1 Introduction

Divers coefficients du modèle effectif (4.2) reposent sur la solution d'un problème-cellule qu'il est donc nécessaire de résoudre numériquement. Nous présentons une formulation variationnelle de ces problèmes qui permet ; elle permet la résolution par la méthode des éléments finis.

4.A.2 Homogénéisation

Notation. On note $\nu =: \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}$. ■

Notation. Ici, $H_{\#}^1(Y)$ est la fermeture des restrictions à Y des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ Y -périodiques. ■

χ_1 est l'unique solution Y -périodique à moyenne nulle de

$$\nabla_y \cdot \frac{1}{\mu_Y(y)} \nabla_y \chi_1(y) = \partial_{y_1} \frac{1}{\mu_Y(y)}, \quad y \in Y.$$

La formulation variationnelle de ce problème est :

$$\begin{cases} \text{trouver } \chi_1 \in H_{\#}^1(Y) \text{ tel que} \\ \forall v \in H_{\#}^1(Y), \quad \int_Y \frac{1}{\mu_Y} \nabla \chi_1 \cdot \nabla v = - \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu_B} \right) \int_{\partial B} \nu_1 v d\sigma, \\ \text{et } \int_Y \chi_1 = 0. \end{cases}$$

χ_2 est l'unique solution Y -périodique à moyenne nulle de

$$\nabla_y \cdot \frac{1}{\mu_Y(y)} \nabla_y \chi_2(y) = \partial_{y_2} \frac{1}{\mu_Y(y)}, \quad y \in Y.$$

La formulation variationnelle de ce problème est :

$$\begin{cases} \text{trouver } \chi_2 \in H_{\#}^1(Y) \text{ tel que} \\ \forall v \in H_{\#}^1(Y), \quad \int_Y \frac{1}{\mu_Y} \nabla \chi_2 \cdot \nabla v = - \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu_B} \right) \int_{\partial B} \nu_2 v d\sigma, \\ \text{et } \int_Y \chi_2 = 0. \end{cases}$$

4.A.3 Conditions de transmission

Le calcul de (Ψ_0, ψ_0) nécessite la résolution de deux problèmes de type : trouver $(\Psi, \psi) \in H_{\#, \text{loc}}^1(\mathcal{Y}) \times \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} \nabla \cdot A_{\mathcal{Y}} \nabla \Psi = F, \text{ dans } \mathcal{Y}_+ \cup \mathcal{Y}_{\text{cl}} \cup \mathcal{Y}_-, \\ [\Psi]|_{\Gamma_1} = 0, & \text{sur } \Gamma_1, \\ [\Psi]|_{\Gamma_0} = 0, & \text{sur } \Gamma_0, \\ \left[\partial_{\nu_{A_{\mathcal{Y}}}} \Psi \right] \Big|_{\Gamma_1} = g_1, & \text{sur } \Gamma_1, \\ \left[\partial_{\nu_{A_{\mathcal{Y}}}} \Psi \right] \Big|_{\Gamma_0} = g_0, & \text{sur } \Gamma_0, \\ y_1 \mapsto \Psi(y_1, \cdot), & 1\text{-périodique}, \\ \Psi \longrightarrow 0, & y_2 \rightarrow -\infty, \\ \Psi \longrightarrow \psi, & y_2 \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

Nous résolvons numériquement un tel problème dans la cellule tronquée \mathcal{Y}_M en imposant une condition de Dirichlet homogène en Γ_{-M} et une condition de Neumann homogène en Γ_M . Pour M choisi suffisamment grand, on s'attend à ce que la solution $\Psi_M \in H_{\#}^1(\mathcal{Y}_M)$ de ce problème dans la cellule \mathcal{Y}_M soit proche de Ψ , et que d'autre part $\Psi_M|_{\Gamma_M}$ soit proche de ψ . Numériquement, on résout ainsi le problème : trouver $\Psi_M \in H_{\#}^1(\mathcal{Y}_M)$ tel que

$$\begin{cases} \nabla \cdot A_{\mathcal{Y}} \nabla \Psi_M = F, \text{ dans } \mathcal{Y}_+ \cup \mathcal{Y}_{\text{cl}} \cup \mathcal{Y}_-, \\ [\Psi_M]|_{\Gamma_1} = 0, & \text{sur } \Gamma_1, \\ [\Psi_M]|_{\Gamma_0} = 0, & \text{sur } \Gamma_0, \\ \left[\partial_{\nu_{A_{\mathcal{Y}}}} \Psi_M \right] \Big|_{\Gamma_1} = g_1, & \text{sur } \Gamma_1, \\ \left[\partial_{\nu_{A_{\mathcal{Y}}}} \Psi_M \right] \Big|_{\Gamma_0} = g_0, & \text{sur } \Gamma_0, \\ \Psi_M|_{\Gamma_{-M}} = 0, & \text{sur } \Gamma_{-M}, \\ \partial_{\nu} \Psi_M|_{\Gamma_{-M}} = 0, & \text{sur } \Gamma_M. \end{cases}$$

La formulation variationnelle de ce problème est :

$$\begin{cases} \text{trouver } \Psi_M \in H_{\#,0}^1(\mathcal{Y}_M) \text{ tel que} \\ \forall v \in H_{\#,0}^1(\mathcal{Y}_M), \quad \int_{\mathcal{Y}_M} A_{\mathcal{Y}} \nabla \Psi_M \cdot \nabla v = - \int_{\mathcal{Y}_M} F v - \int_{\Gamma_1} g_1 v d\sigma - \int_{\Gamma_0} g_0 v d\sigma, \end{cases}$$

où $H_{\#,0}^1(\mathcal{Y}_M) = \{u \in H_{\#}^1(\mathcal{Y}_M) : u|_{\Gamma_{-M}} = 0\}$.

4.A.4 Éléments finis

Les formulations variationnelles que nous avons présentées permettent de résoudre les problèmes par éléments finis. Nous l'avons fait avec le solveur libre **Freefem++** très simple et naturel à utiliser.

Analyse de Fourier

5.1 Introduction

L'analyse asymptotique du modèle périodique (3.1) conduit à un problème effectif (4.2) original. L'originalité provient des conditions de transmission de type impédance généralisée à l'interface et de l'anisotropie du milieu inférieur. Nous souhaitons désormais calculer la solution de ce problème, ainsi que la fonction de Green.

D'une manière générale, pour un problème multi-bande à bandes homogènes, non borné dans chaque direction, la preuve d'existence et d'unicité de la solution est difficile. Pour que le problème soit bien posé, il est nécessaire de disposer de conditions appropriées de comportement à l'infini ; on ne les connaît pas toujours à l'avance. Ces conditions sélectionnent la solution physique du problème. Il s'agit en général de conditions de radiation de type Sommerfeld destinées à choisir le sens de propagation des ondes (sortant le plus souvent). Si l'on souhaite étudier le problème dans un contexte variationnel, de bons espaces de type Sobolev avec poids doivent être introduits. Les poids doivent être l'analogue des conditions de radiation.

Pour ce type de problème, l'analyse de Fourier constitue un cadre agréable de travail, tant pour résoudre le problème que pour deviner les bonnes conditions de radiation, comme dans [25, 28, 10]. En effet, la transformée de Fourier tangentielle aux interfaces établit une correspondance entre le problème spatial initial, et le problème transformé, dit spectral. La transformation envoie les équations aux dérivées partielles de chaque bande vers une équation aux dérivées ordinaires sur un intervalle. La solution du problème spectral s'obtient en résolvant ces EDO, en fonction de constantes. Les conditions de transmission sur les interfaces des bandes se traduisent par des conditions de raccord aux bornes des intervalles. La condition de radiation se traduit par des conditions de comportement à l'infini de la solution spectrale. L'unicité de la solution spatiale revient enfin à une unique détermination des constantes dans le domaine spectral. Le tableau 5.1 schématise cette correspondance.

Une condition sur le comportement à l'infini de la solution spectrale est imposée par la physique du problème, soit par la condition de radiation si elle est connue, soit par principe d'absorption limite. Ceci détermine certaines des constantes. Les conditions de raccord déterminent quand à

Domaine spatial	Domaine spectral
EDP par bande	EDO par intervalle
Conditions de transmission	Conditions de raccord
Condition de radiation	Comportement à l'infini
Unicité de la solution	Détermination unique des constantes
Ondes de surface	Pôles réels

TAB. 5.1: Correspondance entre problème spatial et spectral

elles un système linéaire, dont les inconnues sont les autres constantes. S'il est inversible, alors les constantes sont déterminées de façon unique. La solution spectrale a pour dénominateur le déterminant du système ; la solution spatiale s'obtient par inversion de Fourier. Sinon, le déterminant du système s'annule, ce qui se traduit par l'apparition de pôles réels sur la solution spectrale. Dans ce cas, il faut imposer d'autres conditions de comportement asymptotique pour déterminer de façon unique les constantes (sous réserve d'existence). Cela se traduit dans le domaine spatial par l'apparition d'ondes de surface dont il faut choisir le sens de propagation par d'autres conditions de radiation. Lorsque les conditions de radiation sont inconnues, elles se déduisent au final par analyse asymptotique de l'expression obtenue.

Nous allons donc nous placer dans le cadre de l'analyse de Fourier pour calculer la solution du problème ainsi que la fonction de Green. Nous imposerons le principe d'absorption limite pour déterminer la solution. Par ailleurs, pour éviter l'apparition d'ondes de surface, nous supposons que le déterminant en cause ne s'annule pas. Pour l'imagerie, ce point est important pour ne pas perdre d'énergie et maximiser l'information qui revient au sujet de l'anomalie. Pour la fonction de Green, nous montrons que l'hypothèse de non-annulation sur tout l'axe réel peut être vérifiée par la non-annulation d'un résultant (déterminant) que nous explicitons. Inspirés par la physique, nous décomposons l'expression de nos solutions avec un terme source (d'énergie), un terme de réflexion et un terme de transmission sur l'interface. Nous obtenons une expression explicite pour la solution, et une expression à base d'intégrales de Sommerfeld pour la fonction de Green.

5.2 Solution

Nous nous intéressons à la solution U du problème effectif (4.2) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\mu^+} \Delta U + \omega^2 \varepsilon^+ U = 0, & \text{dans } \mathcal{D}^+, \\ \nabla \cdot \mathcal{A} \nabla U + \omega^2 \varepsilon^- U = 0, & \text{dans } \mathcal{D}^-, \\ [U] = \psi \cdot \nabla U|_{\gamma_0^+}, & \text{sur } \gamma_0, \\ \frac{1}{\mu^+} \partial_{x_2} U|_{\gamma_0^+} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \mathcal{A} \nabla U|_{\gamma_0^-} = \varphi_1 \cdot \partial_{x_1} (\nabla U|_{\gamma_0^+})|_{\gamma_0} + \varphi_2 \cdot \begin{pmatrix} \partial_{x_2 x_1}^2 U|_{\gamma_0^+} \\ (-k^{+2} - \partial_{x_1^2}^2) U|_{\gamma_0^+} \end{pmatrix} \\ \quad + \varphi_3 U|_{\gamma_0^+}, & \text{sur } \gamma_0, \\ \text{+condition de radiation.} & \end{array} \right.$$

On décompose cette solution en

$$U(x) = \begin{cases} u_{\text{inc}}(x) + u_{\text{refl}}(x), & x \in \mathcal{D}^+, \\ u_{\text{trans}}(x), & x \in \mathcal{D}^-, \end{cases}$$

où u_{inc} est l'onde incidente ; l'onde réfléchie u_{refl} et l'onde transmise u_{trans} sont des ondes sortantes. Nous allons calculer u_{refl} et u_{trans} par analyse de Fourier.

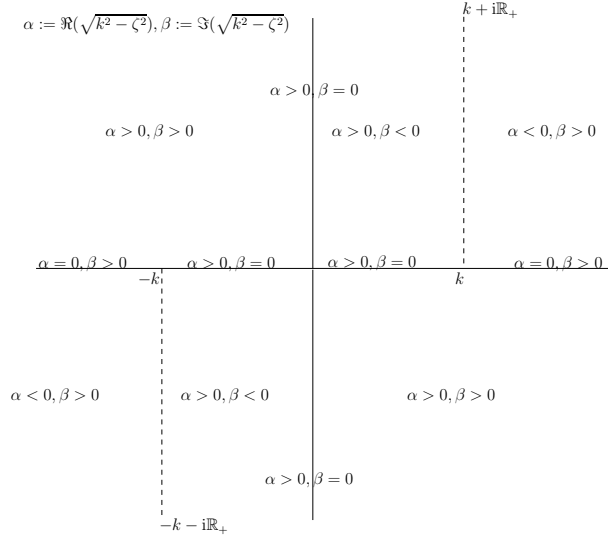
On pose $\begin{bmatrix} s & t \\ t & v \end{bmatrix} := \mathcal{A}$. Comme \mathcal{A} est définie positive, on a $v > 0$. Quitte à étudier la solution $\tilde{U} := vU$ du même problème avec le jeu de paramètres

$$(\mu^+, \mathcal{A}, \varepsilon^+, \varepsilon^-, \psi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) := (v\mu^+, \mathcal{A}/v, \varepsilon^+/v, \varepsilon^-/v, \psi, \varphi_1/v, \varphi_2/v, \varphi_3/v),$$

nous supposons sans perte de généralité $v = 1$.

La transformée de Fourier est notée comme usuellement par un chapeau. La transformée que l'on considère est partielle, il s'agit de celle en la variable tangentielle x_1 . On notera ζ la variable spectrale associée.

On pose $k^+ := \omega \sqrt{\varepsilon^+ \mu^+}$, $d := \det \mathcal{A}$, $k^- := \omega \sqrt{\frac{\varepsilon^-}{d}}$. On détermine $\lambda^+(\zeta) := \sqrt{k^{+2} - \zeta^2}$ et $\lambda^-(\zeta) := \sqrt{d} \sqrt{k^{-2} - \zeta^2}$ de la façon suivante. Pour $\zeta \in \mathbb{R}$, nous choisissons la détermination de la racine dans le premier quadrant. Puis, on choisit la détermination de la racine qui prolonge de façon analytique la fonction sur \mathbb{C} privé de branches de coupe. Nous choisirons $k + i\mathbb{R}^+$ et $-k - i\mathbb{R}^+$

FIG. 5.1: Détermination de $\sqrt{k^2 - \zeta^2} := \sqrt{k - \zeta} \sqrt{k + \zeta}$

comme branches de coupe de $\sqrt{k^2 - \zeta^2}$. Ainsi, si pour $z \neq 0$ d'argument $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}$, on note $\sqrt{z} := \sqrt{|z|}e^{\frac{i}{2}\arg z}$, alors

$$\sqrt{k^2 - \zeta^2} = \sqrt{k - \zeta} \sqrt{k + \zeta},$$

et est déterminée comme sur la Figure 5.1.

Enfin, posons,

$$c_1 = \psi_1 \zeta + \psi_2 \lambda^+, \quad c_2 = \varphi_{11} \zeta^2 + (\varphi_{12} + \varphi_{21}) \zeta \lambda^+ + \varphi_{22} (k^{+2} - \zeta^2)^2 - \varphi_3,$$

$$\tilde{c}_1 = \psi_1 \zeta + \psi_2 k^+ \hat{\theta}_2, \quad \tilde{c}_2 = \varphi_{11} \zeta^2 + (\varphi_{12} + \varphi_{21}) \zeta k^+ \hat{\theta}_2 + \varphi_{22} (k^+ \hat{\theta}_2)^2 - \varphi_3,$$

$$D(\zeta) := (1 - ic_1) i \lambda^- \mu^+ + i \lambda^+ + c_2 \mu^+,$$

et les coefficients de réflexion, resp. de transmission :

$$R(\zeta) = \frac{(-1 + i\tilde{c}_1) i \lambda^- \mu^+ - i k^+ \hat{\theta}_2 - \tilde{c}_2 \mu^+}{D(\zeta)},$$

$$T(\zeta) = \frac{-(1 - ic_1) (i k^+ \hat{\theta}_2 + \tilde{c}_2 \mu^+) - (i \lambda^+ + c_2 \mu^+) (-1 + i\tilde{c}_1)}{D(\zeta)}.$$

Lemme 5.1 (Solution spectrale). *On suppose que D ne s'annule pas sur l'axe réel. Alors :*

$$\hat{u}_{\text{refl}}(\zeta, x_2) = 2\pi R e^{i\lambda^+ x_2} \delta(\zeta - k^+ \hat{\theta}_1), \quad x_2 > 0,$$

$$\hat{u}_{\text{trans}}(\zeta, x_2) = 2\pi T e^{-it\zeta x_2} e^{-i\lambda^-(\zeta)x_2} \delta(\zeta - k^+ \hat{\theta}_1), \quad x_2 < 0.$$

PREUVE. — En prenant la transformée de Fourier en la variable x_1 de l'équation de définition de U , dans \mathcal{D}^+ , puis dans \mathcal{D}^- , on obtient les équations différentielles ordinaires :

$$\partial_{x_2}^2 \hat{U}(\zeta, x_2) + ((k^+)^2 - \zeta^2) \hat{U}(\zeta, x_2) = 0, \quad x_2 > 0,$$

$$\partial_{x_2}^2 \hat{U}(\zeta, x_2) + 2it\zeta \partial_{x_2} \hat{U}(\zeta, x_2) + (\omega^2 \varepsilon - s\zeta^2) \hat{U}(\zeta, x_2) = 0, \quad x_2 < 0,$$

qui possèdent des solutions de la forme :

$$\hat{u}_{\text{refl}}(\zeta, x_2) = \alpha^+(\zeta) e^{i\lambda^+(\zeta)x_2} + \beta^+(\zeta) e^{-i\lambda^+(\zeta)x_2}, \quad x_2 > 0,$$

$$\hat{u}_{\text{trans}}(\zeta, x_2) = e^{-it\zeta x_2} \left(\alpha^-(\zeta) e^{i\lambda^-(\zeta)x_2} + \beta^-(\zeta) e^{-i\lambda^-(\zeta)x_2} \right), \quad x_2 < 0,$$

où $\alpha^+(\zeta)$, $\alpha^-(\zeta)$, $\beta^+(\zeta)$, $\beta^-(\zeta)$ sont des constantes (en x_2).

Si k^+ et k^- avaient une petite partie imaginaire strictement positive, la physique du problème imposerait $\beta^+(\zeta) = 0$ et $\alpha^-(\zeta) = 0$, pour assurer la décroissance exponentielle à l'infini de la solution. Notre cas est la limite, lorsque les parties imaginaires tendent vers 0. Par principe d'absorption limite, nous choisissons donc $\beta^+(\zeta) = 0$ et $\alpha^-(\zeta) = 0$.

D'autre part, les conditions de transmission sur U se traduisent sous forme de conditions de raccord sur \hat{U} :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{U}(\zeta, 0+) - \hat{U}(\zeta, 0-) = \psi \cdot \left(i\zeta \hat{U}(\zeta, 0+) \right), \\ \frac{1}{\mu^+} \partial_{x_2} \hat{U}(\zeta, 0+) - (t \quad 1) \begin{pmatrix} i\zeta \hat{U}(\zeta, 0-) \\ \partial_{x_2} \hat{U}(\zeta, 0-) \end{pmatrix} = \varphi_1 \cdot i\zeta \begin{pmatrix} i\zeta \hat{U}(\zeta, 0+) \\ \partial_{x_2} \hat{U}(\zeta, 0+) \end{pmatrix} \\ \quad \quad \quad + \varphi_2 \cdot \begin{pmatrix} i\zeta \partial_{x_2} \hat{U}(\zeta, 0+) \\ (-k^{+2} + \zeta^2) \hat{U}(\zeta, 0+) \end{pmatrix} \\ \quad \quad \quad + \varphi_3 \hat{U}(\zeta, 0+). \end{array} \right.$$

En injectant les expressions obtenues pour \hat{U} dans les conditions de raccord, on obtient un système linéaire 2×2 :

$$\begin{bmatrix} 1 - ic_1 & -1 \\ i\lambda^+ + c_2\mu^+ & i\lambda^- \mu^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^+ \\ \beta^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1 + i\tilde{c}_1)2\pi\delta(\zeta - k^+\hat{\theta}_1) \\ -(ik^+\hat{\theta}_2 + \tilde{c}_2\mu^+)2\pi\delta(\zeta - k^+\hat{\theta}_1) \end{bmatrix}.$$

Le déterminant de ce système est $D(\zeta)$ que l'on a supposé non nul. On obtient alors par inversion :

$$\begin{bmatrix} \alpha^+ \\ \beta^- \end{bmatrix} = 2\pi\delta(\zeta - k^+\hat{\theta}_1) \begin{bmatrix} R(\zeta) \\ T(\zeta) \end{bmatrix},$$

d'où c.q.f.d. □

Théorème 5.2 (Solution spatiale). *On suppose que D ne s'annule pas sur l'axe réel. Alors :*

$$U(x) = \begin{cases} u_{\text{inc}}(x) + u_{\text{refl}}(x), & x \in \mathcal{D}^+, \\ u_{\text{trans}}(x), & x \in \mathcal{D}^-, \end{cases}$$

avec

$$u_{\text{refl}}(x) = R e^{ik^+\hat{\theta}_R \cdot x}, \quad x_2 > 0, \quad \text{où} \quad R = R(k^+\hat{\theta}_1), \quad \hat{\theta}_R = \begin{pmatrix} \hat{\theta}_1 \\ -\hat{\theta}_2 \end{pmatrix},$$

et

$$u_{\text{trans}}(x) = T e^{i\theta_T \cdot x}, \quad x_2 < 0, \quad \text{où} \quad T = T(k^+\hat{\theta}_1), \quad \theta_T = \begin{pmatrix} k^+\hat{\theta}_1 \\ -tk^+\hat{\theta}_1 - \lambda^-(k^+\hat{\theta}_1) \end{pmatrix},$$

avec $\lambda^-(k^+\hat{\theta}_1) = \sqrt{d} \sqrt{k^{-2} - (k^+\hat{\theta}_1)^2}$ (dans le premier quadrant).

PREUVE. — Il suffit d'appliquer la transformée de Fourier inverse à la solution spectrale du lemme. □

Ainsi, l'onde réfléchie u_{refl} est une onde plane. Quant à l'onde transmise, u_{trans} , elle est plane si $k^{-2} - (k^+\hat{\theta}_1)^2 \geq 0$, et décroît exponentiellement avec x_2 sinon. Il est important de noter ce point pour les applications : il faut veiller à ce que l'onde transmise ne soit pas amortie, si l'on veut espérer imager un objet enfoui.

5.3 Fonction de Green

Nous nous intéressons à la fonction de Green G du problème effectif (4.2) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\mu^+} \Delta G(\cdot, y) + \omega^2 \varepsilon^+ G(\cdot, y) = 0, & \text{dans } \mathcal{D}^+, \\ \nabla \cdot \mathcal{A} \nabla G(\cdot, y) + \omega^2 \varepsilon^- G(\cdot, y) = \delta_y, & \text{dans } \mathcal{D}^-, \\ [G(\cdot, y)] = \psi \cdot \nabla G(\cdot, y)|_{\gamma_0^+}, & \text{sur } \gamma_0, \\ \frac{1}{\mu^+} \partial_{x_2} G(\cdot, y)|_{\gamma_0^+} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \mathcal{A} \nabla G(\cdot, y)|_{\gamma_0^-} = \varphi_1 \cdot \partial_{x_1} (\nabla G(\cdot, y)|_{\gamma_0^+}) \Big|_{\gamma_0} \\ \quad + \varphi_2 \cdot \begin{pmatrix} \partial_{x_2 x_1}^2 G(\cdot, y)|_{\gamma_0^+} \\ (-k^{+2} - \partial_{x_1^2}^2) G(\cdot, y)|_{\gamma_0^+} \end{pmatrix} + \varphi_3 G(\cdot, y)|_{\gamma_0^+}, & \text{sur } \gamma_0, \\ \text{+condition de radiation,} & \end{array} \right. \quad (5.1)$$

où y un point source fixé dans \mathcal{D}^- .

Par analyse de Fourier, nous allons obtenir une décomposition de G de la forme :

$$G(x, y) = \begin{cases} G_{\text{trans}}(x, y), & x_2 > 0, \\ G_{\text{sour}}(x, y) + G_{\text{refl}}(x, y), & x_2 < 0, \end{cases}$$

où chacun des termes est une intégrale de Sommerfeld. Il s'agit de la même technique que pour la solution U , en introduisant en plus une interface artificielle passant par le point source.

On pose $\begin{bmatrix} s & t \\ t & v \end{bmatrix} := \mathcal{A}$. On a $v > 0$. Quitte à étudier la solution $\tilde{G} := uG$ du même problème avec le jeu de paramètres

$$(\mu^+, \mathcal{A}, \varepsilon^+, \varepsilon^-, \psi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) := (v\mu^+, \mathcal{A}/v, \varepsilon^+/v, \varepsilon^-/v, \psi, \varphi_1/v, \varphi_2/v, \varphi_3/v),$$

nous supposons sans perte de généralité $v = 1$.

La transformée de Fourier est notée comme usuellement par un chapeau. La transformée que l'on considère est partielle, il s'agit de celle en la variable tangentielle x_1 . On notera ζ la variable spectrale associée.

On pose $k^+ := \omega \sqrt{\varepsilon^+ \mu^+}$, $d := \det \mathcal{A}$, $k^- := \omega \sqrt{\frac{\varepsilon^-}{d}}$. On détermine $\lambda^+(\zeta) := \sqrt{k^{+2} - \zeta^2}$ et $\lambda^-(\zeta) := \sqrt{d} \sqrt{k^{-2} - \zeta^2}$ comme sur la Figure 5.1.

Enfin, posons

$$\begin{aligned} c_1 &:= \psi_1 \zeta + \psi_2 \lambda^+, \quad c_2 := \varphi_{11} \zeta^2 + (\varphi_{12} + \varphi_{21}) \zeta \lambda^+ + \varphi_{22} (k^{+2} - \zeta^2) - \varphi_3, \\ D &:= \mu^+ \lambda^- + \lambda^+ - i(\mu^+ \lambda^- c_1 + \mu^+ c_2), \quad T := \frac{2\mu^+ \lambda^-}{D}, \quad R := (1 - i c_1) T - 1. \end{aligned}$$

Lemme 5.3 (Fonction de Green spectrale). *On suppose que D ne s'annule pas sur l'axe réel. Alors :*

$$\hat{G}(\zeta, x_2, y) = -\frac{i}{2\lambda^-} \begin{cases} e^{it\zeta y_2} T e^{-i(\lambda^- y_2 + y_1 \zeta)} e^{i\lambda^+ x_2}, & x_2 > 0, \\ e^{-it\zeta(x_2 - y_2)} \left(e^{i(\lambda^- |x_2 - y_2| - y_1 \zeta)} + R e^{-i(\lambda^- y_2 + y_1 \zeta)} e^{-i\lambda^- x_2} \right), & x_2 < 0. \end{cases}$$

PREUVE. — En prenant la transformée de Fourier en la variable x_1 des équations de définition de G , dans \mathcal{D}^+ , puis dans \mathcal{D}^- , on obtient les équations ordinaires :

$$\partial_{x_2^2} \hat{G}(\zeta, x_2, y) + ((k^+)^2 - \zeta^2) \hat{G}(\zeta, x_2, y) = 0, \quad x_2 > 0,$$

$$\partial_{x_2^2} \hat{G}(\zeta, x_2, y) + 2it\zeta \partial_{x_2} \hat{G}(\zeta, x_2, y) + (\omega^2 \varepsilon - s\zeta^2) \hat{G}(\zeta, x_2, y) = e^{-iy_1 \zeta} \delta_{y_2}(x_2), \quad x_2 < 0,$$

et donc :

$$\hat{G}(\zeta, x_2, y) = \begin{cases} \alpha^+(\zeta, y) e^{i\lambda^+(\zeta)x_2} + \beta^+(\zeta, y) e^{-i\lambda^+(\zeta)x_2}, & x_2 > 0, \\ e^{-it\zeta x_2} \left(\alpha^{->}(\zeta, y) e^{i\lambda^-(\zeta)x_2} + \beta^{->}(\zeta, y) e^{-i\lambda^-(\zeta)x_2} \right), & 0 > x_2 > y_2, \\ e^{-it\zeta x_2} \left(\alpha^{-<}(\zeta, y) e^{i\lambda^-(\zeta)x_2} + \beta^{-<}(\zeta, y) e^{-i\lambda^-(\zeta)x_2} \right), & x_2 < y_2, \end{cases}$$

où $\alpha^+(\zeta, y)$, $\alpha^{->}(\zeta, y)$, $\alpha^{-<}(\zeta, y)$, $\beta^+(\zeta, y)$, $\beta^{->}(\zeta, y)$, et $\beta^{-<}(\zeta, y)$ sont des constantes (en x_2).

Par le principe d'absorption limite, on obtient $\beta^+(\zeta, y) = 0$ et $\alpha^{-<}(\zeta, y) = 0$.

D'autre part, les conditions de transmission sur G se traduisent sous forme de conditions de raccord sur \hat{G} en $x_2 = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{G}(\zeta, 0+, y) - \hat{G}(\zeta, 0-, y) = \psi \cdot \left(i\zeta \hat{G}(\zeta, 0+, y) \right), \\ \frac{1}{\mu^+} \partial_{x_2} \hat{G}(\zeta, 0+, y) - (t-1) \left(i\zeta \hat{G}(\zeta, 0-, y) \right) = \varphi_1 \cdot i\zeta \left(i\zeta \hat{G}(\zeta, 0+, y) \right) \\ \quad + \varphi_2 \cdot \left(\frac{i\zeta \partial_{x_2} \hat{G}(\zeta, 0+, y)}{(-k^2 + \zeta^2) \hat{G}(\zeta, 0+, y)} \right) \\ \quad + \varphi_3 \hat{G}(\zeta, 0+, y). \end{array} \right.$$

D'autre part, la distribution de Dirac au second membre de l'équation différentielle obtenue sur \hat{G} dans le domaine $x_2 < 0$, conduit aux conditions de raccord suivantes en $x_2 = y_2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{G}(\zeta, y_2+, y) - \hat{G}(\zeta, y_2-, y) = 0, \\ \partial_{x_2} \hat{G}(\zeta, y_2+, y) - \partial_{x_2} \hat{G}(\zeta, y_2-, y) = e^{-iy_1\zeta}. \end{array} \right.$$

En injectant désormais les expressions obtenues pour \hat{G} dans les formules de raccord, on obtient un système linéaire 4×4 :

$$\begin{bmatrix} 1 - ic_1 & -1 & -1 & 0 \\ \frac{i\lambda^+}{\mu^+} + c_2 & -i\lambda^- & i\lambda^- & 0 \\ 0 & e^{i\lambda^- y_2} & e^{-i\lambda^- y_2} & -e^{-i\lambda^- y_2} \\ 0 & i(-t\zeta + \lambda^-)e^{i\lambda^- y_2} & -i(t\zeta + \lambda^-)e^{-i\lambda^- y_2} & i(t\zeta + \lambda^-)e^{-i\lambda^- y_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^+ \\ \alpha^{->} \\ \beta^{->} \\ \beta^{-<} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ e^{-i(y_1\zeta - t\zeta y_2)} \end{bmatrix}.$$

Le déterminant de ce système est $D(\zeta)$, supposé non nul. On obtient donc :

$$\begin{bmatrix} \alpha^+ \\ \alpha^{->} \\ \beta^{->} \\ \beta^{-<} \end{bmatrix} = -\frac{i}{2\lambda^-} \begin{bmatrix} Te^{it\zeta y_2} e^{-i(\lambda^- y_2 + y_1 \zeta)} \\ e^{it\zeta y_2} e^{-i(\lambda^- y_2 + y_1 \zeta)} \\ e^{it\zeta y_2} Re^{-i(\lambda^- y_2 + y_1 \zeta)} \\ e^{it\zeta y_2} Re^{-i(\lambda^- y_2 + y_1 \zeta)} + e^{it\zeta y_2} e^{i(\lambda^- y_2 - y_1 \zeta)} \end{bmatrix},$$

d'où c.q.f.d. □

Théorème 5.4 (Fonction de Green). *On suppose que D ne s'annule pas sur l'axe réel. Alors :*

$$G(x, y) = \begin{cases} G_{\text{trans}}(x, y), & x_2 > 0, \\ G_{\text{sour}}(x, y) + G_{\text{reff}}(x, y), & x_2 < 0, \end{cases}$$

où les termes de transmission, resp. source, resp. réflexion sont donnés par :

$$G_{\text{trans}}(x, y) := -\frac{i}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda^-} e^{it\zeta y_2} T e^{-i(\lambda^- y_2 + y_1 \zeta)} e^{i\lambda^+ x_2} e^{ix_1 \zeta} d\zeta, \quad x_2 > 0,$$

$$G_{\text{sour}}(x, y) := -\frac{i}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda^-} e^{-it\zeta(x_2 - y_2)} e^{i(\lambda^- |x_2 - y_2| - y_1 \zeta)} e^{ix_1 \zeta} d\zeta, \quad x_2 < 0,$$

$$G_{\text{reff}}(x, y) := -\frac{i}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda^-} e^{-it\zeta(x_2 - y_2)} Re^{-i(\lambda^- y_2 + y_1 \zeta)} e^{-i\lambda^- x_2} e^{ix_1 \zeta} d\zeta, \quad x_2 < 0.$$

PREUVE. — Il suffit d'appliquer la transformée de Fourier inverse à la fonction de Green spectrale du lemme. □

Nous avons ainsi écrit G à l'aide d'intégrales (de Sommerfeld), sous la condition que D ne s'annule pas sur l'axe réel. Les zéros de D étant difficiles à obtenir, nous donnons une condition suffisante facile à vérifier qui permet de s'assurer que D n'a pas de zéro réel : calcul d'un déterminant (de taille majorée par 16).

Lemme 5.5. *Les zéros de D sont contenus dans l'ensemble des racines d'un polynôme P_D de degré au plus 8.*

PREUVE. — On peut écrire D comme fonction de $(\zeta, \lambda^-, \lambda^+)$: $D(\zeta) = D(\zeta, \lambda^-, \lambda^+)$. Il suffit de multiplier D par des expressions conjuguées en λ^+ et λ^- pour faire disparaître les racines carrées :

$$P_D(\zeta) := D(\zeta, \lambda^-, \lambda^+)D(\zeta, -\lambda^-, \lambda^+)D(\zeta, \lambda^-, -\lambda^+)D(\zeta, -\lambda^-, -\lambda^+)$$

est un polynôme de degré au plus 8 qui s'annule en les zéros de D . \square

Remarque. On rappelle que le résultant des polynômes réels $A = \sum_{i=0}^p a_i X^i$ de degré p et $B = \sum_{j=0}^q b_j X^j$ de degré q est le déterminant de taille $p+q$:

$$\begin{vmatrix} a_p & a_{p-1} & \dots & \dots & \dots & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_p & a_{p-1} & \dots & \dots & \dots & a_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_p & a_{p-1} & \dots & \dots & \dots & a_0 \\ b_q & b_{q-1} & \dots & \dots & b_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & b_q & b_{q-1} & \dots & \dots & b_0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & b_q & b_{q-1} & \dots & \dots & b_0 \end{vmatrix},$$

et qu'il s'annule si, et seulement si, A et B ont une racine en commun dans \mathbb{C} . \blacksquare

Propriété 5.6. *On pose $P_D =: P_1 + iP_2$ avec P_1 et P_2 des polynômes à coefficients réels. Une condition suffisante pour que D n'ait pas de zéro réel est que le résultant de P_1 et P_2 soit non nul.*

PREUVE. — En effet, si le résultant de P_1 et P_2 est non nul, alors P_1 et P_2 n'ont pas de racines en commun. Or, l'annulation de D en un réel implique l'annulation de P_1 et P_2 en ce même réel. \square

5.4 Conclusion

Notre problème étant un problème par bandes, nous avons employé l'analyse de Fourier tangentielle pour calculer sa solution ainsi que sa fonction de Green. Le principe d'absorption limite dans le domaine spectral nous a permis de sélectionner la solution physique. Nous avons supposé que le déterminant du système imposé par les conditions de raccord ne s'annule pas sur l'axe réel. Pour la fonction de Green, nous avons donné une condition suffisante pour vérifier facilement cette non-annulation. Les résultats sont présentés sous une décomposition mettant en jeu un terme source d'énergie, un terme de réflexion et un terme de transmission. La non-annulation du déterminant revient, au moins formellement, à l'absence de pôles réels sur les coefficients de transmission et de réflexion. Enfin, le résultat est explicite pour la solution du problème. Il s'exprime en fonction d'intégrales de Sommerfeld pour la fonction de Green.

Fonction de Green effective

6.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons exprimé la fonction de Green (5.1) du problème effectif à l'aide d'intégrales, pour un point source dans le demi-espace inférieur. Il s'agit d'intégrales de type Sommerfeld. Le terme source porte la trace du point source y dans le milieu inférieur. Les termes de réflexion et de transmission portent la trace des conditions de transmission à l'interface entre les deux demi-espaces. L'originalité de ces intégrales portent donc là encore sur l'originalité du milieu effectif.

Il est nécessaire d'exprimer ces intégrales sous une autre forme. D'une part, pour améliorer la compréhension du type d'ondes qu'elles constituent. D'autre part, pour permettre leur évaluation numérique efficacement et rapidement. Il s'agit en effet d'intégrales, sur un domaine non borné, de fonctions qui présentent des singularités, et qui oscillent fortement.

Par un changement de variable, le terme source peut s'exprimer facilement à l'aide de la fonction de Green bien connue d'un milieu isotrope. Les termes de réflexion et de transmission sont beaucoup plus délicats, et nécessitent une analyse particulière. Dans [24], des intégrales de ce type sont évaluées, mais dans le cas classique : demi-espaces isotropes, avec les conditions de transmission usuelles de continuité à l'interface.

Une des méthodes qui y est utilisée est la méthode courante d'évaluation des intégrales de Sommerfeld : méthode de plus forte descente [20, 30, 36, 29]. Il s'agit d'une méthode asymptotique. Elle consiste principalement à effectuer un changement de chemin d'intégration dans le plan complexe, en tirant profit de l'exponentielle de l'intégrande. L'intégrale est alors approchée par la somme des contributions de points critiques : point selle, pôles, points de branchements. Nous allons employer cette technique.

Ce chapitre est organisé comme suit. Dans un premier temps, nous fixons les notations et les hypothèses du problème. Ensuite, nous exprimons le terme source à l'aide d'une fonction de Green d'un milieu isotrope puis nous l'identifions à la fonction de Green d'un espace de paramètres ceux du demi-espace inférieur. Puis, nous appliquons la méthode de plus forte descente au terme de réflexion dans sa zone de validité ; nous complétons la zone de validité par une nouvelle approche à base de splines. Enfin, nous appliquons la plus forte descente au terme de transmission. En annexe, nous présentons l'étude d'une fonction auxiliaire abondamment employée dans la plus forte descente, ainsi que quelques remarques au sujet des pôles des fonctions.

6.2 Problème posé

Nous nous intéressons à la fonction de Green $G(x, y)$ du problème effectif (4.2), où y est un point source fixé dans \mathcal{D}^- .

6.2.1 Notations

On pose $\begin{bmatrix} s & t \\ t & v \end{bmatrix} := \mathcal{A}$. Comme précédemment, nous supposons sans perte de généralité $v = 1$.

On pose $k^+ := \omega\sqrt{\varepsilon^+\mu^+}$, $d := \det \mathcal{A}$, $k^- := \omega\sqrt{\frac{\varepsilon^-}{d}}$. Pour $\zeta \in \mathbb{R}$, on choisit $\lambda^+(\zeta) := \sqrt{k^{+2} - \zeta^2}$ et $\lambda^-(\zeta) := \sqrt{d}\sqrt{k^{-2} - \zeta^2}$ dans le premier quadrant. Puis, on prolonge analytiquement ces deux fonctions sur \mathbb{C} privé de branches de coupes ; par défaut, on prolonge comme dans le chapitre précédent (Figure 5.1). Posons

$$c_1 := \psi_1\zeta + \psi_2\lambda^+, \quad c_2 := \varphi_{11}\zeta^2 + (\varphi_{12} + \varphi_{21})\zeta\lambda^+ + \varphi_{22}(k^{+2} - \zeta^2) - \varphi_3,$$

$$D := \mu^+\lambda^- + \lambda^+ - i(\mu^+\lambda^-c_1 + \mu^+c_2), \quad T := \frac{2\mu^+\lambda^-}{D}, \quad R := (1 - ic_1)T - 1.$$

6.2.2 Position du problème

On suppose que D ne s'annule pas sur \mathbb{R} . Le théorème 5.4 de calcul de la fonction de Green indique alors que G se décompose à l'aide des intégrales :

$$\begin{aligned} G_{\text{sour}}(x, y) &= -\frac{i}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda^-} e^{-it\zeta(x_2-y_2)} e^{i(\lambda^-|x_2-y_2|-y_1\zeta)} e^{ix_1\zeta} d\zeta, & x_2 < 0, \\ -\frac{i}{4\pi} I_3(x, y) := G_{\text{refl}}(x, y) &= -\frac{i}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda^-} e^{-it\zeta(x_2-y_2)} R e^{-i(\lambda^-y_2+y_1\zeta)} e^{-i\lambda^-x_2} e^{ix_1\zeta} d\zeta, & x_2 < 0, \\ -\frac{i}{4\pi} I_1(x, y) := G_{\text{trans}}(x, y) &= -\frac{i}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda^-} e^{it\zeta y_2} T e^{-i(\lambda^-y_2+y_1\zeta)} e^{i\lambda^+x_2} e^{ix_1\zeta} d\zeta, & x_2 > 0. \end{aligned}$$

Dans les sections suivantes, il s'agit d'exprimer ces intégrales sous une forme plus explicite. Pour des raisons techniques, nous supposons $k^+ < k^-$. Les techniques que nous développons pourront être adaptées si $k^- < k^+$.

6.3 Terme source

Théorème 6.1. *Le terme G_{sour} s'écrit :*

$$G_{\text{sour}}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{d}} G_{k^-}(\mathcal{A}^*x, \mathcal{A}^*y),$$

où $G_{k^-}(\tilde{x}, \tilde{y}) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k^- |\tilde{x} - \tilde{y}|)$ est la fonction de Green sortante d'un milieu de nombre d'onde k^- , et \mathcal{A}^* est la matrice réelle triangulaire supérieure à diagonale positive solution de $\mathcal{A}^{*T} \mathcal{A}^* = d\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}^* := \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & \sqrt{d} \end{pmatrix}.$$

PREUVE. — Il est bien connu [3] que pour tout $\tilde{x} \neq \tilde{y}$,

$$-\frac{i}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sqrt{d}}{\lambda^-(\zeta)} e^{i(\tilde{x}_1-\tilde{y}_1)\zeta} e^{i\frac{\lambda^-(\zeta)}{\sqrt{d}}|\tilde{x}_2-\tilde{y}_2|} d\zeta = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k^- |\tilde{x} - \tilde{y}|) = G_{k^-}(\tilde{x}, \tilde{y}).$$

En particulier, si $x \neq y$, alors en posant $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (\mathcal{A}^*x, \mathcal{A}^*y)$, on obtient

$$G_{\text{sour}}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{d}} G_{k^-}(\mathcal{A}^*x, \mathcal{A}^*y).$$

□

Corollaire 6.2. G_{sour} est la fonction de Green sortante d'un milieu de tenseur et de permittivité ceux de \mathcal{D}^- :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathcal{A} \nabla G_{\text{sour}}(\cdot, y) + \omega^2 \varepsilon^- G_{\text{sour}}(\cdot, y) = \delta_y, & \text{dans } \mathbb{R}^2, \\ + \text{condition de radiation,} \end{cases}$$

la condition de radiation étant :

$$\nabla_x G_{\text{sour}}(x, y) \cdot \frac{e}{|e|} - i\omega \sqrt{\frac{\varepsilon^-}{\ell}} G_{\text{sour}}(x, y) = \mathcal{O}(|x|^{-3/2}),$$

pour tout (ℓ, e) élément propre de \mathcal{A} .

PREUVE. — Il suffit d'injecter l'expression obtenue dans le théorème dans l'équation, en exploitant

$$\begin{cases} (\Delta + (k^-)^2)G_{k^-}(\cdot, \tilde{y}) = \delta_{\tilde{y}}, \text{ dans } \mathbb{R}^2, \\ + \text{ condition de radiation.} \end{cases}$$

□

6.4 Terme de réflexion

6.4.1 Introduction

Soit $x \in \mathcal{D}^-$ ($x_2 < 0$). En coordonnées polaires,

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{d}(x_2 + y_2) \\ -t(x_2 - y_2) + x_1 - y_1 \end{pmatrix} =: \rho \begin{pmatrix} \cos \theta_3 \\ \sin \theta_3 \end{pmatrix}, \text{ où } \rho = \left| \mathcal{A}^* \left(x - \begin{pmatrix} 1 & -2t \\ 0 & -1 \end{pmatrix} y \right) \right|, \theta_3 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right).$$

Nous allons calculer par la méthode de plus forte descente l'intégrale de réflexion

$$I_3 = \int_{\mathbb{R}} f(\zeta) d\zeta, \quad \text{où } f := ge^h, \quad g := \frac{R}{\lambda^-}, \quad h := \rho h_{k^-, \theta_3},$$

avec h_{\cdot} , définie et étudiée dans l'annexe 6.A. Pour des raisons techniques, nous supposons que les courbes de plus forte descente n'intersectent pas l'ensemble des pôles de f , et nous supposons que les pôles de f sont simples. La méthode est valable pour un ensemble d'angles θ_3 hors d'un petit intervalle. Pour la zone de non-validité, nous étendons nos résultats de façon lisse par interpolation de type splines. Enfin, nos résultats sont présentés de façon synthétique page 43.

Remarque. Par le changement de variable $\zeta := -\zeta$, on constate que I_3 est invariante par la transformation de $(\theta_3, \psi_1, \varphi_{12}, \varphi_{21})$ en $(-\theta_3, -\psi_1, -\varphi_{12}, -\varphi_{21})$. Quitte à poser $(\theta_3, \psi_1, \varphi_{12}, \varphi_{21}) := (-\theta_3, -\psi_1, -\varphi_{12}, -\varphi_{21})$, nous supposons sans perte de généralité $\theta_3 \geq 0$. ■

6.4.2 Méthode de plus forte descente

Points critiques

Les points de branchement de f sont issus des racines carrées : $-k^-, k^-, -k^+$ et k^+ . Les pôles de f sont les pôles de $\frac{R}{\lambda^-}$, avec même ordre de multiplicité. Pour des raisons techniques, on les suppose simples. Le résidu de f en un pôle z est $\text{Res}(f; z) = \text{Res}\left(\frac{R}{\lambda^-}; z\right) e^{h(z)}$. Enfin, par Lemme 6.15, le point selle ζ_3 , unique solution de l'équation $h'(\zeta) = 0$, est $\zeta_3 = k^- \sin \theta_3$.

Chemin de plus forte descente

Par Lemme 6.16 et Lemme 6.17, le chemin de plus forte descente issu du point selle est $\gamma(u) := u + iv(u)$, $u \in \mathbb{R}$, avec

$$v(u) = - \frac{(k^- - u \sin \theta_3)(u - k^- \sin \theta_3)}{[(k^- - u \sin \theta_3)^2 + (u - k^- \sin \theta_3)^2 + 2 \sin \theta_3 (k^- - u \sin \theta_3)(u - k^- \sin \theta_3)]^{1/2}}.$$

On notera \mathcal{P} l'ensemble des pôles de f situés entre γ et l'axe réel.

Théorème des résidus

L'idée principal de la méthode est de changer le chemin d'intégration de $I_3 = \int_{\mathbb{R}} f$ en le chemin de plus forte descente γ . La justification du procédé s'opère par théorème des résidus [37], ce qui nécessite de contourner les singularités de f . Au final, I_3 s'exprime ainsi en fonction d'une intégrale à base de γ , d'éventuels résidus, et d'éventuelles intégrales sur des branches de coupe. Pour pouvoir effectuer une analyse générique, nous supposons que la courbe γ ne passe par aucun pôle de f . Différentes configurations sont possibles ; ceci nécessite donc l'étude de différents cas.

Théorème 6.3. *Supposons $\theta_3 > 0$ et $k^- \sin \theta_3 < k^+$. Alors :*

$$I_3(x, y) = \int_{\gamma} f + 2\pi i \sum_{z \in \mathcal{P}} \text{signe}(\Im z) \text{Res}(f; z).$$

PREUVE. — On note $A := \{u + i\tau v(u), u < k^- \sin \theta_3, 0 < \tau < 1\}$, $B := \{u + i\tau v(u), k^- \sin \theta_3 < u < \frac{k^-}{\sin \theta_3}, 0 < \tau < 1\}$, $C := \{u + i\tau v(u), \frac{k^-}{\sin \theta_3} < u, 0 < \tau < 1\}$.

Soit un contour σ_η (cf. Figure 6.1) qui joint une portion de γ et une portion d'axe réel par un demi-cercle de grand rayon $\frac{1}{\eta} > 0$. σ_η contourne de plus les points de branchement de f par des demi-cercle de petit rayon η .

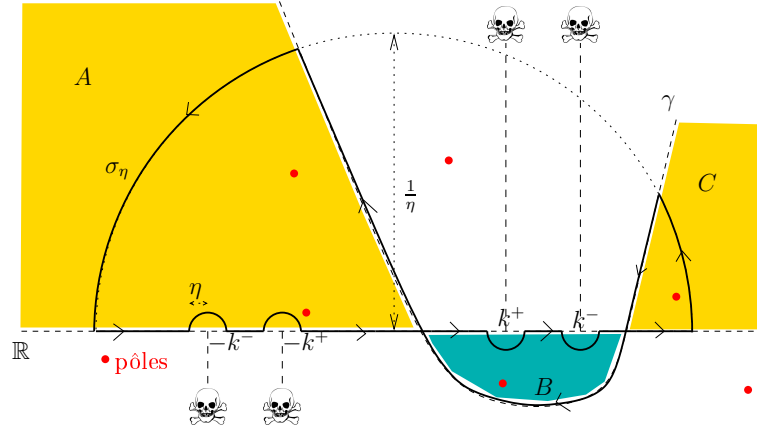


FIG. 6.1: σ_η dans le cas $\theta_3 > 0$, $k^- \sin \theta_3 < k^+$

Par hypothèse de régularité que nous avons faites, on peut appliquer le théorème des résidus sur σ_η puis passer à la limite lorsque $\eta \rightarrow 0$. La contribution des portions du cercle de rayon $\frac{1}{\eta}$ tendant vers 0 par lemme de Jordan, on obtient finalement :

$$\int_{\mathbb{R}} f = \int_{\gamma} f + 2\pi i \sum_{z \in \mathcal{P} \cap (A \cup C)} \text{Res}(f; z) - 2\pi i \sum_{z \in \mathcal{P} \cap B} \text{Res}(f; z),$$

d'où c.q.f.d. □

Théorème 6.4. *Supposons $\theta_3 > 0$ et $k^+ < k^- \sin \theta_3$. Alors :*

$$I_3(x, y) = \int_{\gamma} f + \int_{\tilde{\gamma}} (f|_- - f|_+)(\zeta) d\zeta + 2\pi i \sum_{z \in \mathcal{P}} \text{signe}(\Im z) \text{Res}(f; z),$$

où $\tilde{\gamma}$ est le chemin de plus forte descente issu de k^+ supposé ne pas intersecter \mathcal{P} , et

$$f|_-(\zeta) = \lim_{\substack{z \rightarrow \zeta \\ \Im z < \Im \tilde{\gamma}(\Re z)}} f(z), \quad f|_+(\zeta) = \lim_{\substack{z \rightarrow \zeta \\ \Im z > \Im \tilde{\gamma}(\Re z)}} f(z).$$

Remarque. $f|_-(\zeta)$, resp. $f|_+(\zeta)$, peut se définir avec les formules de $f(\zeta)$ en remplaçant $\lambda^+(\zeta)$ par $\lambda_-^+(\zeta)$, resp. $\lambda_+^+(\zeta)$, détermination de $\sqrt{k^+{}^2 - \zeta^2}$ à partie réelle positive, resp. négative. On a par ailleurs $\lambda_+^+(\zeta) = -\lambda_-^+(\zeta)$. ■

PREUVE. — Le chemin d'intégration σ_η que l'on introduit doit, en plus, contourner une branche de coupe de λ^+ . Pour pouvoir évaluer efficacement l'intégrale qui apparaîtra sur cette branche, nous choisissons comme branche de coupe un chemin de plus forte descente. Introduisons ainsi $\tilde{\gamma}(u) = u + i\tilde{v}(u)$, $u \leq k^+$, chemin de plus forte descente issu de k^+ :

$$\tilde{v}(u) = \frac{(\tilde{k} - u \sin \theta_3) \left[(u - \tilde{k} \sin \theta_3)^2 + (\tilde{k}^2 - k^{-2}) \cos^2 \theta_3 \right]^{1/2}}{\left[(\tilde{k} - u \sin \theta_3)^2 + (u - \tilde{k} \sin \theta_3)^2 + 2 \sin \theta_3 (\tilde{k} - u \sin \theta_3)(u - \tilde{k} \sin \theta_3) \right]^{1/2}},$$

où $\tilde{k} := \sqrt{k^{-2} - k^{+2}} \cos \theta_3 + k^+ \sin \theta_3$, par Lemme 6.16 et Lemme 6.17.

Comme branches de coupe de λ^+ , on choisit ici $\tilde{\gamma}$ et son symétrique (par rapport à l'origine). La Figure 6.2 montre le signe à choisir pour les parties réelle et imaginaire de λ^+ dans le demi-espace supérieur. (Les signes s'obtiennent par symétrie dans le demi-espace inférieur.)

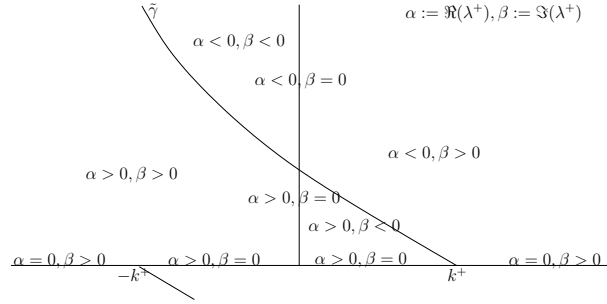


FIG. 6.2: Détermination de λ^+ dans le cas $\theta_3 > 0$, $k^+ < k^- \sin \theta_3$

On introduit ensuite un chemin σ_η (cf. Figure 6.3) de façon comparable au cas précédent, en contournant de plus la branche de coupe $\tilde{\gamma}$.

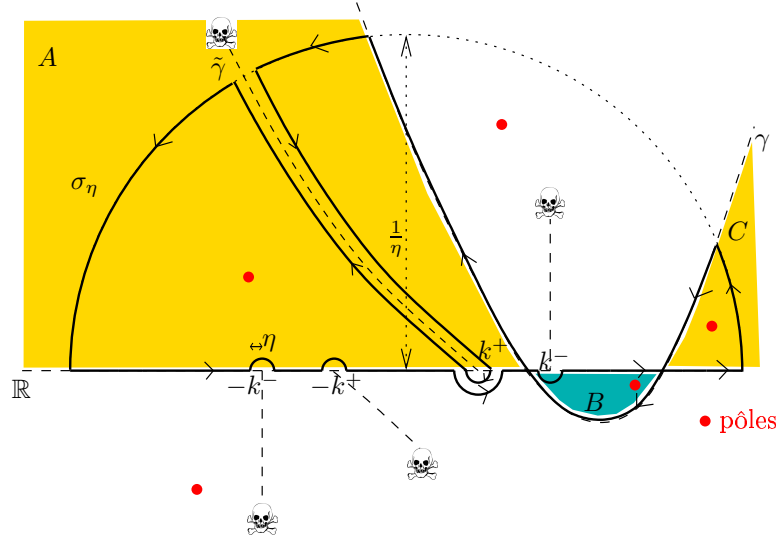


FIG. 6.3: σ_η dans le cas $\theta_3 > 0$, $k^+ < k^- \sin \theta_3$

Comme la courbe $\tilde{\gamma}$ est supposée ne passer par aucun pôle de f , alors par théorème des résidus, puis passage à la limite :

$$\int_{\mathbb{R}} f = \int_{\gamma} f + \int_{\tilde{\gamma}} (f|_- - f|_+)(\zeta) d\zeta + 2\pi i \sum_{z \in \mathcal{P} \cap (A \cup C)} \text{Res}(f; z) - 2\pi i \sum_{z \in \mathcal{P} \cap B} \text{Res}(f; z),$$

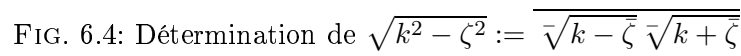
d'où c.q.f.d. □

Théorème 6.5. *Supposons $\theta_3 = 0$. Alors :*

$$I_3(x, y) = \int_{\gamma} f + 2\pi i \sum_{z \in \mathcal{P}} \text{signe}(\Im z) \text{Res}(f; z).$$

PREUVE. — λ^- et λ^+ sont ici choisis par Figure 6.4.

On introduit un contour σ_η (cf. Figure 6.5) qui passe par l'axe réel et γ , et en joignant γ et l'axe réel par des portions de cercles de rayon $\frac{1}{\eta}$. On note $A := \{u + i\tau v(u), u < 0, 0 < \tau < 1\}$, et $B := \{u + i\tau v(u), u > 0, 0 < \tau < 1\}$.


$$\int_{\mathbb{R}} f = \int_{\gamma} f - 2\pi i \sum_{z \in \mathcal{P} \cap A} \text{Res}(f; z) + 2\pi i \sum_{z \in \mathcal{P} \cap B} \text{Res}(f; z).$$

Nous avons obtenus dans notre étude des intégrales sur des chemins de plus forte descente issus de points critiques : une intégrale sur le chemin de plus forte descente γ issu du point selle ζ_3 , ainsi qu'une intégrale sur la branche de coupe $\tilde{\gamma}$, issue du point de branchement k^+ . Chacune de ces intégrales contient une exponentielle décroissante le long du chemin d'intégration. L'idée est alors de considérer que seul un voisinage du point critique considéré apporte une contribution à l'intégrale. En ne gardant ensuite que l'ordre dominant des développements de Taylor des fonctions, on obtient une approximation de l'intégrale.

Théorème 6.6 (Contribution du point selle). *La contribution du point selle est :*

$$\int_{\gamma} f \approx R(\zeta_3) \sqrt{\frac{\pi}{dk^- \rho}} (1 - i) e^{ik^- \rho}.$$

PREUVE. — L'intégrale sur le chemin de plus forte descente issu du point selle est

$$\int_{\gamma} f = e^{h(\zeta_3)} \int_{\mathbb{R}} g(\gamma(u)) e^{h(\gamma(u)) - h(\zeta_3)} \gamma'(u) du.$$

Par décroissance de l'exponentielle puis troncature des développements en série :

$$\int_{\gamma} f \approx e^{h(\zeta_3)} \int_{\zeta_3 - a}^{\zeta_3 + a} g(\zeta_3) \gamma'(\zeta_3) e^{h''(\zeta_3) \gamma'(\zeta_3)^2 \frac{(u - \zeta_3)^2}{2}} du,$$

où $a > 0$ est un réel suffisamment petit. Dans cette intégrale, nous effectuons le changement de variable $s := \sqrt{\frac{-h''(\zeta_3) \gamma'(\zeta_3)^2}{2}} (u - \zeta_3)$. À un facteur multiplicatif près, on obtient alors une intégrale sur un intervalle centré en l'origine, et dont l'intégrande est $s \mapsto e^{-s^2}$. Cette intégrale est approchée par l'intégrale sur \mathbb{R} , dont la valeur est $\sqrt{\pi}$. Quant au facteur multiplicatif, il s'agit de $e^{h(\zeta_3)} g(\zeta_3) \gamma'(\zeta_3) \sqrt{\frac{-2}{h''(\zeta_3) \gamma'(\zeta_3)^2}}$. En conclusion, nous avons obtenu :

$$\int_{\gamma} f \approx R(\zeta_3) \sqrt{\frac{\pi}{dk^- \rho}} (1 - i) e^{ik^- \rho}.$$

□

Remarque. Lorsque $k^- \rho$ est grand, on peut approcher le membre de droite à l'aide une fonction de Hankel et alors :

$$\int_{\gamma} f \approx \frac{\pi}{\sqrt{d}} R(\zeta_3) H_0^{(1)}(k^- \rho).$$

■

Théorème 6.7 (Contribution du point de branchement). *Dans le cas $\theta_3 > 0$ et $k^+ < k^- \sin \theta_3$, la contribution du point de branchement k^+ est de la forme :*

$$\int_{\tilde{\gamma}} (f|_- - f|_+) \approx \frac{C}{\rho^{3/2}} e^{i\tilde{k}\rho} \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

où C et \tilde{k} sont deux constantes.

PREUVE. — On effectue un changement de paramétrage pour le chemin $\tilde{\gamma}$: on l'écrit désormais comme $\zeta = \zeta(\tau)$ donné par :

$$h(\zeta(\tau)) - h(k^+) = -\tau,$$

ce changement étant licite puisque h' ne s'annule pas sur la branche en question. Ceci permet d'écrire :

$$\int_{\tilde{\gamma}} (f|_- - f|_+) (\zeta) d\zeta = e^{h(k^+)} \int_0^{+\infty} [g|_+(\zeta(\tau)) - g|_-(\zeta(\tau))] e^{-\tau} \zeta'(\tau) d\tau,$$

avec $g|_-$ et $g|_+$ définies suivant les mêmes conventions que $f|_-$ et $f|_+$.

Par des développements limités au voisinage de $t = 0$:

$$[g|_+(\zeta(\tau)) - g|_-(\zeta(\tau))] \zeta'(\tau) = \frac{C}{\rho^{3/2}} \sqrt{\tau} + \mathcal{O}(\sqrt{\tau}),$$

avec :

$$C := \frac{-\alpha_0 \sqrt{k^+}}{\left(\sin \theta_3 - \cos \theta_3 \frac{k^+}{\sqrt{k^{-2} - k^{+2}}} \right)^{3/2}} (1 + i), \quad \alpha_0 := \frac{4}{\alpha_3} \left(-\frac{\alpha_1 \alpha_4}{\alpha_3} + \alpha_2 \right),$$

$$\alpha_1 := \mu^+(1 - i\psi_1 k^+), \quad \alpha_2 := -i\mu^+ \psi_2,$$

$$\alpha_3 := \alpha_1 \lambda^-(k^+) - i\mu^+ c_2(k^+), \quad \alpha_4 := 1 + \alpha_2 \lambda^-(k^+) - i\mu^+ (\varphi_{12} + \varphi_{21}) k^+.$$

En remplaçant $[g|_-(\zeta(\tau)) - g|_+(\zeta(\tau))] \zeta'(\tau)$ par le terme dominant de son développement asymptotique, on obtient une estimation de l'intégrale, par décroissance de l'exponentielle. Ainsi,

$$\int_{\tilde{\gamma}} (f|_- - f|_+) \approx e^{h(k^+)} \int_0^\infty \frac{C}{\rho^{3/2}} \sqrt{\tau} e^{-\tau} d\tau \approx \frac{C}{\rho^{3/2}} e^{i\tilde{k}\rho} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

□

6.4.3 Interpolation de type Spline

On suppose que θ_3 est dans la région $|k^+ - k^- \sin \theta_3| \leq \delta\zeta$, i.e. $|\theta_3 - \theta_0| \leq \delta\theta$, où $\delta\zeta > 0$ est un petit paramètre, $k^- \sin \theta_0 := k^+$ et $\delta\theta = \frac{\delta\zeta}{k^- \cos \theta_0}$. Le point selle $k^- \sin \theta_3$ et le point de branchement k^+ de g sont proches ; cette région est donc critique : la méthode de plus forte descente n'est pas valable [24]. Pour traiter ce cas, il est employé dans [24] une méthode exposée dans [21], dite méthode du développement asymptotique uniforme. Cette méthode permet d'écrire I_3 à l'aide de fonctions de Hermite. Nous proposons une autre méthode, plus simple à mettre en œuvre.

I_3 peut être vue comme une fonction de (ρ, θ_3) . Comme cette fonction est régulière en $\theta_3 =: \theta$, il est raisonnable de faire une interpolation de type spline, en approchant $\theta \mapsto I_3(\rho, \theta)$ par un polynôme $P(\theta)$ sur l'intervalle $\theta \in [\theta_0 - \delta\theta, \theta_0 + \delta\theta]$, avec conditions de régularité au bord. nous choisirons P comme dans le théorème suivant.

Théorème 6.8. *On pose $\theta_\pm := \theta_0 \pm \delta\theta$, Le polynôme de degré au plus 3, $P(\theta) = \alpha_3\theta^3 + \alpha_2\theta^2 + \alpha_1\theta + \alpha_0$, où*

$$\begin{bmatrix} \theta_-^3 & \theta_-^2 & \theta_- & 1 \\ 3\theta_-^2 & 2\theta_- & 1 & 0 \\ \theta_+^3 & \theta_+^2 & \theta_+ & 1 \\ 3\theta_+^2 & 2\theta_+ & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3(\rho, \theta_-) \\ \left. \frac{\partial I_3}{\partial \theta} \right|_g(\rho, \theta_-) \\ I_3(\rho, \theta_+) \\ \left. \frac{\partial I_3}{\partial \theta} \right|_d(\rho, \theta_+) \end{bmatrix}$$

prolonge $I_3(\theta)$ (calculé par plus forte descente) dans la zone critique $[\theta_-, \theta_+]$. Le prolongement est continu et à dérivée continue en θ_\pm . Ici, $\left. \frac{\partial I_3}{\partial \theta} \right|_{g,d}$ désigne la dérivée à gauche, resp. droite de $I_3(\theta)$.

PREUVE. — Pour un polynôme $P(\theta) = \alpha_3\theta^3 + \alpha_2\theta^2 + \alpha_1\theta + \alpha_0$, la condition de continuité au bord de la fonction et de sa dérivée se traduisent par

$$\begin{cases} P(\theta_-) = I_3(\rho, \theta_-), \\ P'_d(\theta_-) = \left. \frac{\partial I_3}{\partial \theta} \right|_g(\rho, \theta_-), \\ P(\theta_+) = I_3(\rho, \theta_+), \\ P'_g(\theta_+) = \left. \frac{\partial I_3}{\partial \theta} \right|_d(\rho, \theta_+), \end{cases} \quad i.e. \quad \begin{bmatrix} \theta_-^3 & \theta_-^2 & \theta_- & 1 \\ 3\theta_-^2 & 2\theta_- & 1 & 0 \\ \theta_+^3 & \theta_+^2 & \theta_+ & 1 \\ 3\theta_+^2 & 2\theta_+ & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3(\rho, \theta_-) \\ \left. \frac{\partial I_3}{\partial \theta} \right|_g(\rho, \theta_-) \\ I_3(\rho, \theta_+) \\ \left. \frac{\partial I_3}{\partial \theta} \right|_d(\rho, \theta_+) \end{bmatrix}.$$

□

Remarque. Le second membre est évalué par plus forte descente, après avoir écrit un schéma aux différences finies pour les dérivées. ■

6.4.4 Synthèse

Nous avons calculé le terme I_3 par la méthode de plus forte descente, et par interpolation dans la zone de non-validité de celle-ci. Le terme de réflexion G_{refl} s'obtient par la relation $G_{\text{refl}} = -\frac{i}{4\pi} I_3$. Dans le Tableau 6.1, nous récapitulons les résultats que nous avons ainsi obtenus. En conclusion, la réflexion est une superposition d'ondes provenant des points critiques : point selle, pôles situés entre le chemin de plus forte descente et l'axe réel, et points de branchement dont la branche de coupe intersecte le chemin de plus forte descente.

$\theta_3 < 0$	$\theta_3 \geq 0$		
	$k^- \sin \theta_3 < k^+$	Transition : $ k^- \sin \theta_3 - k^+ < \delta$	$k^+ < k^- \sin \theta_3$
Se ramène à $\theta_3 > 0$	<p>Plus forte descente Contributions :</p> <ul style="list-style-type: none"> Point selle ζ_3 : $-\frac{i}{4\pi} R(\zeta_3) \sqrt{\frac{\pi}{dk^- \rho}} (1 - i) e^{ik^- \rho}$ <ul style="list-style-type: none"> Pôles z de g situés entre l'axe réel et le chemin de plus forte descente : $\frac{1}{2} \sum_z \text{signe}(\Im z)$ $\times \text{Res} \left(\frac{R}{\lambda^-}; z \right) e^{\rho h_{k^-, \theta_3}}$	Interpolation	<p>Plus forte descente Contributions :</p> <ul style="list-style-type: none"> Point selle ζ_3 : $-\frac{i}{4\pi} R(\zeta_3) \sqrt{\frac{\pi}{dk^- \rho}} (1 - i) e^{ik^- \rho}$ <ul style="list-style-type: none"> Pôles z de g situés entre l'axe réel et le chemin de plus forte descente : $\frac{1}{2} \sum_z \text{signe}(\Im z)$ $\times \text{Res} \left(\frac{R}{\lambda^-}; z \right) e^{\rho h_{k^-, \theta_3}}$ <ul style="list-style-type: none"> Point de branchement k^+ : $\tilde{C} \frac{e^{ik^+ \rho}}{\rho^{3/2}}$

TAB. 6.1: Synthèse du calcul de G_{refl} . Pour la méthode de plus forte de descente, le résultat est la somme des contributions des points critiques. La zone de validité de la plus forte descente est prolongée par interpolation spline.

6.5 Terme de transmission

6.5.1 Introduction

Nous souhaitons calculer l'intégrale de transmission $I_1(x, y)$ par plus forte descente. On écrit I_1 sous une forme comparable à la la forme employée pour I_3 , ce qui permet d'avoir une démarche et des preuves analogues.

Soit $x \in \mathcal{D}^+$ ($x_2 > 0$). En coordonnées polaires, $x = |x| \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \end{pmatrix}$, avec $\theta_1 \in (0, \pi)$. Posons :

$$g(\zeta) := \frac{T(\zeta)}{\lambda^-(\zeta)} e^{i(\zeta(ty_2 - y_1) - \lambda^-(\zeta)y_2)}, \quad h(\zeta) := h_{k^+, \theta_1 - \frac{\pi}{2}}(-\zeta), \quad f(\zeta) := g(\zeta) e^{|x|h(\zeta)},$$

avec $h_{\cdot, \cdot}$ définie dans l'annexe 6.A. Il s'agit ainsi de calculer par plus forte descente l'intégrale

$$I_1(x, y) = \int_{\mathbb{R}} f(\zeta) d\zeta,$$

Pour des raisons techniques, nous supposons que les courbes de plus forte descente n'intersectent pas l'ensemble des pôles de f , et nous supposons que les pôles de f sont simples.

Remarque. Par le changement de variable $\zeta := -\zeta$, on constate que I_1 est invariante par la transformation de $(\theta_1, \psi_1, \varphi_{12}, \varphi_{21}, t, y_1)$ en $(\pi - \theta_1, -\psi_1, -\varphi_{12}, -\varphi_{21}, -t, -y_1)$. Quitte à poser

$$(\theta_1, \psi_1, \varphi_{12}, \varphi_{21}, t, y_1) := (\pi - \theta_1, -\psi_1, -\varphi_{12}, -\varphi_{21}, -t, -y_1),$$

nous supposons sans perte de généralité $\theta_1 \leq \frac{\pi}{2}$. ■

6.5.2 Méthode de plus forte descente

Points critiques

Les points de branchement de f sont issus des racines carrées : $-k^-, k^-, -k^+$ et k^+ . Les pôles de f sont les pôles de $\frac{T}{\lambda^-}$, avec même ordre de multiplicité. Pour des raisons techniques, on les suppose simples. Le résidu de f en un pôle z est $\text{Res}(f; z) = \text{Res}\left(\frac{T}{\lambda^-}; z\right) e^{i(z(ty_2 - y_1) - \lambda^-(z)y_2)} e^{|x|h(z)}$. Enfin, par Lemme 6.15, le point selle ζ_1 , unique solution de l'équation $h'(\zeta) = 0$, est $\zeta_1 = k^+ \cos \theta_1$.

Chemin de plus forte descente

D'après le Lemme 6.16 et le Lemme 6.17, le chemin de plus forte descente issu du point selle ζ_1 est $\gamma(u) = u + iv(u)$, $u \in \mathbb{R}$, où

$$v(u) = - \frac{(k^+ - u \cos \theta_1)(u - k^+ \cos \theta_1)}{[(k^+ - u \cos \theta_1)^2 + (u - k^+ \cos \theta_1)^2 + 2 \cos \theta_1 (k^+ - u \cos \theta_1)(u - k^+ \cos \theta_1)]^{1/2}}.$$

On notera \mathcal{P} l'ensemble des pôles de f situés entre γ et l'axe réel.

Théorème des résidus

Nous allons changer le chemin d'intégration de $I_1 = \int_{\mathbb{R}} f$ en appliquant le théorème des résidus, sur un chemin à base du chemin de plus forte descente γ , en contournant les éventuelles singularités de l'intégrande, ainsi qu'éventuellement des branches de coupe des racines carrées. On suppose que γ ne passe par aucun pôle de f .

Théorème 6.9. *Supposons $\theta_1 < \frac{\pi}{2}$ et $k^+ \geq k^- \cos \theta_1$. Alors :*

$$I_1(x, y) = \int_{\gamma} f + 2\pi i \sum_{z \in \mathcal{P}} \text{signe}(\Im z) \text{Res}(f; z).$$

Théorème 6.10. *Supposons $\theta_1 < \frac{\pi}{2}$ et $k^+ < k^- \cos \theta_1$. Alors :*

$$I_1(x, y) = \int_{\gamma} f + \int_{\tilde{\gamma}} (f|_+ - f|_-)(\zeta) d\zeta + 2\pi i \sum_{z \in \mathcal{P}} \text{signe}(\Im z) \text{Res}(f; z),$$

avec $\tilde{\gamma}(u) := u + i\tilde{v}(u)$, $u \geq k^-$ le chemin de plus forte descente passant par k^- :

$$\tilde{v}(u) = - \frac{(k_0 - u \cos \theta_1) \left[(u - k_0 \cos \theta_1)^2 + (k_0^2 - k^{+2}) \sin^2 \theta_1 \right]^{1/2}}{[(k_0 - u \cos \theta_1)^2 + (u - k_0 \cos \theta_1)^2 + 2 \cos \theta_1 (k_0 - u \cos \theta_1)(u - k_0 \cos \theta_1)]^{1/2}},$$

où $k_0 := k^- \cos \theta_1$; λ^- a pour branches de coupe $\tilde{\gamma}$ et son symétrique par rapport à l'origine ; enfin $f|_-(\zeta) = \lim_{\substack{z \rightarrow \zeta \\ \Im z > \Im \tilde{\gamma}(\Re z)}} f(z)$, $f|_+(\zeta) = \lim_{\substack{z \rightarrow \zeta \\ \Im z < \Im \tilde{\gamma}(\Re z)}} f(z)$.

Remarque. Un peu plus explicitement, $f|_-(\zeta)$, resp. $f|_+(\zeta)$, peut se définir avec les formules de $f(\zeta)$ en remplaçant $\lambda^-(\zeta)$ par $\lambda_-^-(\zeta)$, resp. $\lambda_+^-(\zeta)$, détermination de $\sqrt{d}\sqrt{k^{-2} - \zeta^2}$ à partie imaginaire négative, resp. positive. NB : On a $\lambda_+^-(\zeta) = -\lambda_-^-(\zeta)$. ■

Théorème 6.11. *Supposons $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$. Alors :*

$$I_1(x, y) = \int_{\gamma} f + 2\pi i \sum_{z \in \mathcal{P}} \text{signe}(\Im z) \text{Res}(f; z).$$

Approximation de l'ordre dominant

Nous effectuons une approximation de l'ordre dominant pour les intégrales que nous avons obtenues.

Théorème 6.12 (Contribution du point selle). *La contribution du point selle est :*

$$\int_{\gamma} f \approx \frac{T(\zeta_1)k^+ \sin \theta}{\lambda^-(\zeta_1)} e^{i(\zeta_1(ty_2 - y_1) - \lambda^-(\zeta_1)y_2)} \sqrt{\frac{\pi}{k^+ |x|}} (1 - i) e^{ik^+ |x|}.$$

PREUVE. — Il s'agit de :

$$\int_{\gamma} f \approx e^{|x|h(\zeta_1)} g(\zeta_1) \gamma'(\zeta_1) \sqrt{\frac{-2}{|x| h''(\zeta_1) \gamma'(\zeta_1)^2}} \sqrt{\pi}.$$

□

Théorème 6.13 (Contribution du point de branchement). *Pour $\theta_1 < \frac{\pi}{2}$ et $k^+ < k^- \cos \theta_1$, la contribution du point de branchement k^- est de la forme :*

$$\int_{\tilde{\gamma}} (f|_+ - f|_-) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2} C \left(y_2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) e^{ik^-(ty_2 - y_1 + x_1)} \frac{e^{-x_2 \sqrt{k^{-2} - k^{+2}}}}{|x|^{3/2}}.$$

où les constantes sont déterminées dans la preuve.

PREUVE. — On a

$$[g|_+(\zeta(\tau)) - g|_-(\zeta(\tau))] \zeta'(\tau) = C \left(y_2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) e^{ik^-(ty_2 - y_1)} \sqrt{\tau} + o(\sqrt{\tau}),$$

avec :

$$\alpha_1 := \lambda^+(k^-) - i\mu^+ c_2(k^-), \quad \alpha_2 := \mu^+(1 - ic_1(k^-)),$$

$$C := \frac{4\mu^+}{\alpha_1 h'(k^-)} \sqrt{d} \sqrt{\frac{2}{h'(k^-)}}, \quad \text{où } \Im \sqrt{\frac{2}{h'(k^-)}} > 0.$$

□

6.5.3 Synthèse

Nous avons calculé le terme I_1 par la méthode de plus forte descente. Le terme de transmission G_{trans} s'obtient par la relation $G_{\text{trans}} = -\frac{i}{4\pi}I_1$. Dans le Tableau 6.2, nous récapitulons les résultats que nous avons ainsi obtenus. En conclusion, la transmission est une superposition d'ondes provenant des points critiques : point selle, pôles situés entre le chemin de plus forte descente et l'axe réel, et points de branchement dont la branche de coupe intersecte le chemin de plus forte descente.

6.6 Conclusion

Nous avons décomposé dans le chapitre précédent la fonction de Green effective du problème (3.1) à l'aide d'intégrales de Sommerfeld. Dans le demi-espace inférieur, la fonction de Green est la superposition de deux termes que nous avons appelés terme source et terme de réflexion. Dans le demi-espace supérieur, elle constitue un terme de transmission.

Nous avons réussi à identifier le terme source avec la fonction de Green d'un espace de paramètres ceux du milieu inférieur, en se ramenant, par un changement de variables, à une formule de représentation de Sommerfeld connue. D'autre part, concernant les termes de réflexion et de transmission, nous les avons calculés par la méthode de plus forte descente. Un changement d'intégration contournant les singularités, et passant par le point selle, a permis d'exprimer ces intégrales en fonction de contributions de points critiques : point selle, pôles et points de branchement.

Dans les perspectives, on pourrait tenter de mener une étude poussée sur les pôles en fonction des paramètres du problème. Cela pourrait permettre d'identifier plus facilement les phénomènes qui apparaissent, et sous quelles hypothèses. Il peut être notamment intéressant de considérer le cas des pôles réels, cas que nous avons exclu. L'expression générale de notre problème annonce toutefois la tâche très difficile.

6.A Étude d'une fonction auxiliaire

Nous étudions une fonction auxiliaire qui est utilisée pour le calcul des termes de réflexion et de transmission. Les calculs de cette partie sont inspirés de [24].

Soient $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ et $k > 0$. On pose

$$h_{k,\theta}(\zeta) := i \left(\zeta \sin \theta + \sqrt{k^2 - \zeta^2} \cos \theta \right), \quad \zeta \in \mathbb{C}, \quad (6.1)$$

où $\sqrt{k^2 - \zeta^2}$ est donnée ou bien par la Figure 5.1, ou bien par la Figure 6.4. Dans cette section, on note $h := h_{k,\theta}$ pour alléger les notations.

Lemme 6.14. *On a*

$$h'(\zeta) = i(\sin \theta - \frac{\zeta}{\sqrt{k^2 - \zeta^2}} \cos \theta), \quad h''(\zeta) = -i \frac{k^2 \cos \theta}{(k^2 - \zeta^2) \sqrt{k^2 - \zeta^2}}.$$

Lemme 6.15 (Point selle).

$$h'(\zeta) = 0 \iff \zeta = k \sin \theta.$$

PREUVE. —

\implies : Supposons $h'(\zeta) = 0$. Par surjectivité de \sin (comme fonction complexe), il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\zeta = k \sin \alpha$. Alors $\sqrt{k^2 - \zeta^2} = \pm k \cos \alpha$ et $h'(\zeta) = 0$ équivaut donc à $\tan \alpha = \pm \tan \theta$. On a donc $\alpha \equiv \pm \theta \pmod{\pi}$. En particulier $\zeta \in \mathbb{R}$. La détermination choisie pour $\sqrt{k^2 - \zeta^2}$ étant alors dans le premier quadrant, on a $\sqrt{k^2 - \zeta^2} = k \cos \theta$. $h'(\zeta) = 0$ conduit alors à $\sin \alpha = \sin \theta$, d'où c.q.f.d.

\impliedby : Évident.

□

$\theta_1 > \frac{\pi}{2}$	$\theta_1 \leq \frac{\pi}{2}$	
	$k^+ \geq k^- \cos \theta_1$	$k^+ < k^- \cos \theta_1$
Se ramène à $\theta_1 \leq \frac{\pi}{2}$	<p>Plus forte descente Contributions :</p> <ul style="list-style-type: none"> Point selle ζ_1 : $-\frac{i}{4\pi} \frac{T(\zeta_1)k^+ \sin \theta}{\lambda^-(\zeta_1)} e^{i(\zeta_1(ty_2-y_1)-\lambda^-(\zeta_1)y_2)} \times \sqrt{\frac{\pi}{k^+ x }} (1-i) e^{ik^+ x }$ <ul style="list-style-type: none"> Pôles z de g situés entre l'axe réel et le chemin de plus forte descente : $\frac{1}{2} \sum_z \text{signe}(\Im z) \text{Res} \left(\frac{T}{\lambda^-}; z \right) \times e^{i(z(ty_2-y_1)-\lambda^-(z)y_2)} e^{ x h(z)}$	<p>Plus forte descente Contributions :</p> <ul style="list-style-type: none"> Point selle ζ_3 : $-\frac{i}{4\pi} \frac{T(\zeta_1)k^+ \sin \theta}{\lambda^-(\zeta_1)} e^{i(\zeta_1(ty_2-y_1)-\lambda^-(\zeta_1)y_2)} \times \sqrt{\frac{\pi}{k^+ x }} (1-i) e^{ik^+ x }$ <ul style="list-style-type: none"> Pôles z de g situés entre l'axe réel et le chemin de plus forte descente : $\frac{1}{2} \sum_z \text{signe}(\Im z) \text{Res} \left(\frac{T}{\lambda^-}; z \right) \times e^{i(z(ty_2-y_1)-\lambda^-(z)y_2)} e^{ x h(z)}$ <ul style="list-style-type: none"> Point de branchement k^- : $\frac{\sqrt{\pi}}{2} C \left(y_2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) e^{ik^-(ty_2-y_1+x_1)} \times \frac{e^{-x_2 \sqrt{k^-^2 - k^+^2}}}{ x ^{3/2}}$

TAB. 6.2: Synthèse du calcul de G_{trans} . Le résultat est la somme des contributions des points critiques.

Remarque. Le point selle s'interprète comme le point critique de $\Re(h)$ le long des courbes de niveau de $\Im(h)$. ■

Lemme 6.16 (Courbes de niveau de $\Im h$). (i) Supposons

$$\Im h(\zeta) = k_0, \Im h(\zeta_0). \quad (6.2)$$

où $k_0 := \Im h(\zeta_0)$ avec ζ_0 quelconque. Notons $u := \Re \zeta$, $v := \Im \zeta$. Supposons $uv \neq 0$. Alors

$$v = \pm \frac{(k_0 - u \sin \theta) [(u - k_0 \sin \theta)^2 + (k_0^2 - k^2) \cos^2 \theta]^{1/2}}{[(k_0 - u \sin \theta)^2 + (u - k_0 \sin \theta)^2 + 2 \sin \theta (k_0 - u \sin \theta)(u - k_0 \sin \theta)]^{1/2}}. \quad (6.3)$$

(ii) Soit une courbe lisse $\gamma(u) = u + iv(u)$, $u \in \mathbb{R}$ avec $v(u)$ vérifiant (6.3), où $k_0 \in \mathbb{R}^*$. Alors γ est une courbe de niveau de $\Im h$: $\Im h(\gamma(u)) = k_0$.

(iii) Si $v(u)$ vérifie (6.3), alors

$$\frac{dv}{du} = \frac{(u - k_0 \sin \theta) [(k_0 - u \sin \theta)^2 - v^2 \cos^2 \theta] v}{(k_0 - u \sin \theta)^2 [(u - k_0 \sin \theta)^2 + (k_0^2 - k^2) \cos^2 \theta]} - \frac{v \sin \theta}{k_0 - u \sin \theta}.$$

PREUVE. —

(i) Notons $\alpha := \Re \sqrt{k^2 - \zeta^2}$ et $\beta := \Im \sqrt{k^2 - \zeta^2}$. L'égalité (6.2) prouve $\alpha = \frac{k_0 - u \sin \theta}{\cos \theta}$. D'autre part, $\sqrt{k^2 - \zeta^2}^2 = k^2 - \zeta^2$ équivaut à $\alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta = k^2 - u^2 + v^2 - 2iuv$, i.e. :

$$\alpha\beta = -uv, \quad k^2 - u^2 + v^2 = \alpha^2 - \beta^2.$$

Alors comme $uv \neq 0$, $\alpha \neq 0$, donc on a $\beta = -\frac{uv}{\alpha} = -\frac{u \cos \theta}{k_0 - u \sin \theta} v$, puis

$$v^2 [(k_0 - u \sin \theta)^2 + (u \cos \theta)^2] \cos^2 \theta = (u^2 - k^2) \cos^2 \theta + (k_0 - u \sin \theta)^2,$$

d'où c.q.f.d.

(ii) Posons $\beta(u) := -\frac{u \cos \theta}{k_0 - u \sin \theta} v(u)$, et $\alpha(u) := -\frac{uv(u)}{\beta(u)} = \frac{k_0 - u \sin \theta}{\cos \theta}$ (on prolonge par continuité β , resp. α , en $k_0 - u \sin \theta = 0$, resp. $\beta(u) = 0$). Comme :

- $(\alpha(u) + i\beta(u))^2 = k^2 - \gamma(u)^2$ pour $k_0 - u \sin \theta \neq 0$ et $\beta(u) \neq 0$;
 - les signes de $\alpha(u)$ et $\beta(u)$ sont identiques aux signes des parties réelles et imaginaires de $\sqrt{k^2 - \gamma(u)^2}$;
 - $\alpha + i\beta$ est continue;
- alors $\sqrt{k^2 - \gamma(u)^2} = \alpha(u) + i\beta(u)$. Finalement,

$$\Im h(\gamma(u)) = u \sin \theta + \alpha(u) \cos \theta = k_0.$$

□

Lemme 6.17. On se donne une courbe (suffisamment lisse) de niveau de $\Im h$ de type précédent $\gamma(u) = u + iv(u)$ avec $v(u)$ vérifiant (6.3), et $k_0 \in \mathbb{R}^*$. Si le point selle $k \sin \theta$ appartient à cette courbe, on le note $\zeta_0 = u_0$. Sinon, $\zeta_0 = u_0$ est un point de cette courbe supposé sur l'axe réel : $v(u_0) = 0$. Alors $\Re h$ atteint un maximum le long de γ en ζ_0 si, et seulement si, $v(u)$ est choisi dans

$$(6.3) \text{ avec le signe : } \begin{cases} +, & \text{si } u < u_0, \\ -, & \text{si } u > u_0. \end{cases}$$

PREUVE. — La fonction (réelle) $u \mapsto h(\gamma(u)) - h(\zeta_0)$ s'annule en $u = u_0$, et sa dérivée ne s'annule pas sur $u < u_0$, ni sur $u > u_0$. Par conséquent cette fonction est de signe constant sur $u < u_0$ et sur $u > u_0$. Il suffit alors de regarder le comportement à l'infini de cette fonction pour en déduire son signe. On peut enfin montrer que

$$\begin{aligned} h(\gamma(u)) - h(\zeta_0) &= -v(u) \left[\sin \theta - \frac{u \cos \theta}{k_0 - u \sin \theta} \right] \\ &\sim \pm C u, \text{ avec } C \text{ constante } > 0, \end{aligned}$$

d'où c.q.f.d. □

Remarque. Le cas échéant, γ est alors la courbe de niveau de $\Im(h)$ passant par le point ζ_0 et sur laquelle $\Re(h)$ atteint un maximum en ζ_0 . En chaque point de cette courbe, la décroissance est maximale, d'où son nom de « chemin de plus forte descente ». ■

Lemme 6.18. *On note $\zeta_0 = k \sin \theta$ le point selle.*

(i) *On a*

$$h(\zeta_0) = ik, \quad h''(\zeta_0) = \frac{-i}{k \cos^2 \theta}.$$

(ii) *Si v vérifie (6.3) avec $k_0 = k$, alors en $u = \zeta_0$,*

$$\left. \frac{dv}{du} \right|_{u=\zeta_0} = \pm 1.$$

6.B Au sujet des pôles

Contrairement au cas classique étudié dans [24], nos coefficients de transmission et de réflexion ont éventuellement des pôles. Nous rappelons que nous avons supposé qu'ils sont simples et non réels. Nous présentons ici quelques remarques à leur sujet : calcul numérique, calcul de leur résidu et vérification des hypothèses.

Calcul des pôles

La recherche de ces pôles passe par la résolution de l'équation

$$D(\zeta) = 0.$$

Nous avons vu au chapitre 5, que cette équation peut se ramener la recherche des racines d'un polynôme de degré (au plus) 8. Un autre moyen de procéder est de remarquer que si $D(\zeta) = 0$, alors le triplet $(X_0, Y_0, Z_0) = (\zeta, \lambda^+(\zeta), \lambda^-(\zeta))$ est une solution du système d'équations polynômiales (de degré deux et à trois variables) :

$$\begin{cases} (1 - iC_1)\mu^+ Z + Y - i\mu^+ C_2 = 0, \\ Y^2 - (k^{+2} - X^2) = 0, \\ Z^2 - d(k^{-2} - X^2) = 0, \end{cases}$$

où l'on a posé $C_1 := \psi_1 X + \psi_2 Y$, $C_2 := \varphi_{11} X^2 + (\varphi_{12} + \varphi_{21})XY + \varphi_{22} Y^2 - \varphi_3$. Dans notre code, nous déterminons numériquement l'ensemble $\{(X_i, Y_i, Z_i)\}$ des solutions de ce système d'équations polynômiales avec **Maple** dont on se sert comme une boîte noire.

Les pôles de $\frac{T}{\lambda^-}$ sont les X_i qui n'appartiennent pas aux branches de coupe des racines carrées et qui annulent D . Par ailleurs, les pôles de $\frac{R}{\lambda^-}$ sont les pôles de $\frac{T}{\lambda^-}$ qui n'annulent pas $1 - ic_1$.

Une fois les pôles obtenus, on dispose d'un autre moyen simple de vérification qu'ils sont réels : il suffit de tester la nullité de leur partie imaginaire.

Résidus

L'hypothèse de multiplicité simple signifie que si z est un pôle de $\frac{T}{\lambda^-}$, alors $\zeta \mapsto (\zeta - z) \frac{T(\zeta)}{\lambda^-(\zeta)}$ est bornée au voisinage de z . Sous cette hypothèse, le résidu de $\frac{T}{\lambda^-}$ en un pôle z , noté $\text{Res}(\frac{T}{\lambda^-}; z)$ vérifie

$$(\zeta - z) \frac{T(\zeta)}{\lambda^-(\zeta)} \xrightarrow[\zeta \rightarrow z]{\zeta \neq z} \text{Res}\left(\frac{T}{\lambda^-}; z\right).$$

Numériquement, pour valider cette hypothèse, nous vérifions que $\left| \delta \frac{T(z+\delta)}{\lambda^-(z+\delta)} \right| < M$, où $M > 0$ est un grand paramètre, et δ est un complexe de petit module. Le cas échéant, alors le résidu est :

$$\text{Res}\left(\frac{T}{\lambda^-}; z\right) \approx \frac{\delta}{2} \left(\frac{T(z+\delta)}{\lambda^-(z+\delta)} - \frac{T(z-\delta)}{\lambda^-(z-\delta)} \right).$$

Enfin, le résidu d'un pôle z de $\frac{R}{\lambda^-}$ est

$$\text{Res} \left(\frac{R}{\lambda^-}; z \right) = (1 - \text{i}c_1(z)) \text{Res} \left(\frac{T}{\lambda^-}; z \right).$$

Problème modèle d'objet dissimulé

7.1 Introduction

Nous nous intéressons à un problème modèle d'objet dissimulé. On étudie le problème d'une inclusion enfouie dans le modèle fluctuant (3.1) présenté dans le chapitre 3. Ce problème constitue un modèle de tumeur dans le derme dans le contexte médical, ou un modèle d'objet dans une tenue de camouflage dans le contexte militaire. Le milieu étudié dans les chapitres précédents constitue désormais le milieu de fond. Quant à l'inclusion, on l'appelle aussi objet, ou anomalie, en référence aux applications. En supposant que l'objet est suffisamment grand par rapport aux inhomogénéités du milieu et qu'il est suffisamment en profondeur par rapport à la taille de la couche, alors l'analyse asymptotique effectuée dans le chapitre 4 est encore valable et permet de remplacer le problème de fond par le milieu effectif (4.2), que l'on appellera encore milieu de fond. En particulier, la solution et la fonction de Green de ce milieu de fond ont été calculées dans les chapitres précédents.

D'une manière générale, l'ajout d'une inclusion dans un milieu perturbe la propagation des ondes. Une manière usuelle d'appréhender un tel problème est la méthode des équations intégrales [32, 7]. La perturbation engendrée, dite onde diffractée, est une onde qui se propage dans le milieu de fond. Elle s'exprime à l'aide d'un opérateur de convolution sur le bord de l'anomalie, de noyau la fonction de Green du milieu de fond. Quant à l'onde qui se propage à l'intérieur de l'inclusion, on l'écrit par convolution avec le noyau de Green de l'anomalie. Cela fournit une représentation intégrale, dite simple couche, en fonction des fonctions de Green et de la solution de fond. Cette représentation dépend de fonctions définies sur le bord de l'anomalie, déterminées par les conditions de transmission, sous la forme d'un système d'équations intégrales. Celui-ci peut être écrit sous forme variationnelle, puis résolu numériquement par la méthode des éléments finis de frontière [2]. Cette dernière conduit à un système linéaire plein à inverser. Les éléments de la matrice sont des intégrales à base de fonctions de Green ; le second membre contient des intégrales à base la solution de fond. Cela nécessite donc l'emploi de formules de quadrature, avec une attention particulière sur les singularités des fonctions de Green [27].

Ce chapitre s'organise de la façon suivante. Après avoir formulé mathématiquement le problème, nous présentons la formule de représentation intégrale simple couche ainsi qu'une formulation variationnelle du système d'équations intégrales sous-jacent. Ensuite, nous présentons quelques méthodes d'évaluation d'intégrales ; l'accent est mis sur les singularités des fonctions de Green que l'on isole pour en obtenir des intégrales exactes. Enfin, nous concluons par la résolution par la méthode des éléments finis de frontière.

7.2 Problème posé

Au chapitre 4, nous avons transformé le problème modèle (3.1) en le problème effectif (4.2) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\mu_+} \Delta U + \omega^2 \varepsilon_+ U = 0, & \text{dans } \mathcal{D}^+, \\ \nabla \cdot \mathcal{A} \nabla U + \omega^2 \varepsilon^* U = 0, & \text{dans } \mathcal{D}^-, \\ [U] = \xi \psi_0 \cdot \nabla U|_{\gamma_0^+}, & \text{sur } \gamma_0, \\ \frac{1}{\mu_+} \partial_{x_2} U|_{\gamma_0^+} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \mathcal{A} \nabla U|_{\gamma_0^-} = \xi \left(G_1^{(1)} \cdot \partial_{x_1} (\nabla U|_{\gamma_0^+}) \Big|_{\gamma_0} + G_1^{(2)} \cdot \begin{pmatrix} \partial_{x_2 x_1}^2 U|_{\gamma_0^+} \\ (-k^{+2} - \partial_{x_1^2}^2) U|_{\gamma_0^+} \end{pmatrix} \right. \\ \quad \left. + \omega^2 \left(\varepsilon_{\text{cl}} - \varepsilon_+ \frac{\mu_+}{\mu_{\text{cl}}} \right) G_1^{(3)} U|_{\gamma_0^+} \right), & \text{sur } \gamma_0, \\ \text{+condition de radiation.} \end{array} \right.$$

On ajoute une inclusion (anomalie ou objet) $D \subset \mathcal{D}^-$ dans la peau. D est de permittivité $\varepsilon_D > 0$ et de perméabilité $\mu_D > 0$. On suppose que D est suffisamment en profondeur par rapport à la taille de la couche, et que D est grande devant les inhomogénéités du milieu inférieur. Sous ces hypothèses, l'analyse asymptotique permet, au moins formellement, de remplacer le milieu de fond par le milieu effectif précédent. Ainsi, il s'agit de résoudre :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\mu_+} \Delta u + \omega^2 \varepsilon_+ u = 0, & \text{dans } \mathcal{D}^+, \\ \nabla \cdot \mathcal{A}_D \nabla u + \omega^2 \varepsilon_D^* u = 0, & \text{dans } \mathcal{D}^-, \\ [u] = \xi \psi_0 \cdot \nabla u|_{\gamma_0^+}, & \text{sur } \gamma_0, \\ \frac{1}{\mu_+} \partial_{x_2} u|_{\gamma_0^+} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \mathcal{A} \nabla u|_{\gamma_0^-} = \xi \left(G_1^{(1)} \cdot \partial_{x_1} (\nabla u|_{\gamma_0^+}) \Big|_{\gamma_0} \right. \\ \quad \left. + G_1^{(2)} \cdot \begin{pmatrix} \partial_{x_2 x_1}^2 u|_{\gamma_0^+} \\ (-k^{+2} - \partial_{x_1^2}^2) u|_{\gamma_0^+} \end{pmatrix} \right. \\ \quad \left. + \omega^2 \left(\varepsilon_{\text{cl}} - \varepsilon_+ \frac{\mu_+}{\mu_{\text{cl}}} \right) G_1^{(3)} u|_{\gamma_0^+} \right), & \text{sur } \gamma_0, \\ \text{+condition de radiation,} \end{array} \right. \quad (7.1)$$

où l'on a posé $\mathcal{A}_D(x) := \mathcal{A} \mathbb{1}_{\mathcal{D}^- \setminus \overline{D}}(x) + \frac{1}{\mu_D} \mathbb{1}_D(x)$ et $\varepsilon_D^*(x) := \varepsilon^* \mathbb{1}_{\mathcal{D}^- \setminus \overline{D}}(x) + \varepsilon_D \mathbb{1}_D(x)$.

7.3 Représentation intégrale

7.3.1 Introduction

À l'aide des potentiels simple couche des fonctions de Green, nous pouvons obtenir une formule de représentation intégrale de la fonction u . u s'exprime ainsi à l'aide de fonctions solutions d'un système d'équations intégrales dont nous donnerons une formulation faible.

7.3.2 Représentation intégrale

On note G la fonction de Green du milieu de fond, et G_D la fonction de Green sortante dans un milieu de nombre d'onde $k_D := \omega \sqrt{\varepsilon_D \mu_D}$:

$$G_D(x, y) := -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_D |x - y|), \quad x, y \in \mathbb{R}^2.$$

Les potentiels simple couche associés à G et G_D , appliqués en la fonction φ , sont respectivement :

$$\mathcal{S}\varphi(x) := \int_{\partial D} G(x, y) \varphi(y) d\sigma(y), \quad \mathcal{S}_D \varphi(x) := \int_{\partial D} G_D(x, y) \varphi(y) d\sigma(y).$$

Pour $x \in \partial D$, ν_x désigne la normale unitaire extérieure à D en x , et on pose :

$$\begin{aligned} \partial_{\nu_x} * (x, y) &:= \nabla_x * (x, y) \cdot \nu_x, & \partial_{\nu} *|_{\pm}(x) &:= \lim_{t \rightarrow 0^{\pm}} \nabla * (x + t\nu_x) \cdot \nu_x \text{ (lorsque la limite existe),} \\ \partial_{\nu_{\mathcal{A}}} * (x, y) &:= \nu_x^T \mathcal{A} \nabla_x * (x, y), & \partial_{\nu_{\mathcal{A}}} *|_{\pm}(x) &:= \lim_{t \rightarrow 0^{\pm}} \nu_x^T \mathcal{A} \nabla * (x + t\nu_x) \text{ (lorsque la limite existe).} \end{aligned}$$

Enfin, on définit les opérateurs suivants :

$$\mathcal{K}^* \varphi(x) := \int_{\partial D} \partial_{\nu_A} G(x, y) \varphi(y) d\sigma(y), \quad \mathcal{K}_D^* \varphi(x) := \int_{\partial D} \partial_{\nu_x} G_D(x, y) \varphi(y) d\sigma(y).$$

On dispose des formules de saut suivantes [7] :

Lemme 7.1.

$$\partial_{\nu_A}(\mathcal{S}\varphi)|_{\pm} = \pm \frac{1}{2} \varphi + \mathcal{K}^* \varphi, \quad \partial_{\nu}(\mathcal{S}_D \varphi)|_{\pm} = \pm \frac{1}{2} \varphi + \mathcal{K}_D^* \varphi.$$

Le théorème suivant [11] est d'une importance capitale. Il exprime la solution u du problème avec anomalie comme une perturbation de la solution U du problème de fond (sans anomalie). La perturbation engendrée est une convolution à noyau de Green. Le milieu de fond intervient à travers la solution U et la fonction de Green G . Les conditions de transmission au travers la frontière ∂D sont portées par les fonctions que l'on convole.

Théorème 7.2 (Représentation intégrale). *u possède la représentation intégrale :*

$$u = \begin{cases} U + \mathcal{S}\varphi & \text{dans } \mathcal{D}^+ \cup (\mathcal{D}^- \setminus \overline{D}), \\ \mathcal{S}_D \psi & \text{dans } D, \end{cases}$$

où le couple $(\varphi, \psi) \in L^2(\partial D) \times L^2(\partial D)$ est l'unique solution du système d'équations intégrales :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{S}_D & -\mathcal{S} \\ \frac{1}{\mu_D}(-\frac{1}{2} + \mathcal{K}_D^*) & -(\frac{1}{2} + \mathcal{K}^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ \partial_{\nu_A} U \end{bmatrix}, \text{ sur } \partial D,$$

où $\partial_{\nu_A} U(x) = \nu_x^T \mathcal{A} \nabla U(x)$.

Ayant effectué le calcul de U et G dans les chapitres 5 et 6, il ne reste qu'à résoudre le système d'équations intégrales, dont nous allons donner une formulation variationnelle pour le numérique.

7.3.3 Formulation variationnelle

On définit les espaces de Sobolev $H^{1/2}(\partial D)$ et $H^{-1/2}(\partial D)$ comme classiquement : $H^{1/2}(\partial D)$ est l'espace des traces sur ∂D des fonctions de $H^1(D)$ ($L^2(D)$ à gradient L^2), et $H^{-1/2}(\partial D)$ est le dual de $H^{1/2}(\partial D)$. La version variationnelle du système d'équations intégrales est donnée par le théorème suivant.

Théorème 7.3 (Formulation variationnelle). *La formulation variationnelle du système d'équations intégrales est : trouver $(\varphi, \psi) \in H^{-1/2}(\partial D) \times H^{-1/2}(\partial D)$ tel que*

pour tout $(v, w) \in H^{-1/2}(\partial D) \times H^{1/2}(\partial D)$:

$$\begin{cases} \langle \mathcal{S}_D \psi, v \rangle - \langle \mathcal{S} \varphi, v \rangle = \langle U, v \rangle, \\ \left\langle \frac{1}{\mu_D}(-\frac{1}{2} + \mathcal{K}_D^*)(\psi), w \right\rangle - \left\langle (\frac{1}{2} + \mathcal{K}^*)(\varphi), w \right\rangle = \langle \partial_{\nu_A} U, w \rangle. \end{cases}$$

Cette formulation est celle que nous emploierons pour le numérique, après avoir discrétisé les espaces fonctionnels, et choisi un ensemble de couples de fonctions tests (v, w) .

7.4 Calcul numérique d'intégrales

7.4.1 Introduction

La méthode de résolution de notre problème nécessite l'évaluation d'intégrales. Nous allons expliciter ici les méthodes employées.

Les intégrales des fonctions non singulières sont évaluées par des formules de quadrature que nous rappelons. Les fonctions de Green présentant des singularités, elles nécessitent une attention particulière et certains résultats techniques que nous présentons. Enfin, nous présentons un moyen de calcul de quelques intégrales à base des fonctions de Green G et G_D .

7.4.2 Formules de quadrature

Nous présentons ici la manière dont nous calculerons numériquement les intégrales de fonctions non singulières. Plus précisément, nous donnons des formules de quadrature pour certaines intégrales, et nous indiquons comment les intégrales que nous rencontrerons s'y ramènent.

Nous calculons numériquement nos intégrales par quadrature de Gauss à deux points.

Lemme 7.4. Soient $\tilde{f} : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ et $\tilde{g} : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ non singulières. Soient $x_0 := \frac{1-\sqrt{1/3}}{2}$ et $x_1 := \frac{1+\sqrt{1/3}}{2}$. Alors

$$\int_0^1 \tilde{f}(t) dt \approx \frac{1}{2} [\tilde{f}(x_0) + \tilde{f}(x_1)],$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \tilde{g}(t, s) ds dt \approx \frac{1}{4} [\tilde{g}(x_0, x_0) + \tilde{g}(x_0, x_1) + \tilde{g}(x_1, x_0) + \tilde{g}(x_1, x_1)].$$

Lemme 7.5. Soient $a \neq b$ et $c \neq d$ dans \mathbb{R}^2 . Soient $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ et $g : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbb{C}$ non singulières. Soit $\tilde{f}(t) := f((1-t)a + tb)$ et $\tilde{g}(t, s) := g((1-t)a + tb, (1-s)c + sd)$. Alors \tilde{f} et \tilde{g} satisfont les hypothèses du lemme 7.4, et

$$\frac{1}{|b-a|} \int_{[a,b]} f(x) d\sigma(x) = \int_0^1 \tilde{f}(t) dt,$$

$$\frac{1}{|b-a| |d-c|} \int_{[a,b]} \int_{[c,d]} g(x, y) d\sigma(y) d\sigma(x) = \int_0^1 \int_0^1 \tilde{g}(t, s) ds dt.$$

Toutes les intégrales de fonctions non singulières que nous rencontreront se calculeront numériquement par utilisation successive des Lemmes 7.5 et 7.4. La formule de quadrature sera précise en pratique, car les segments d'intégration $[a, b]$ et $[c, d]$ seront de petite longueur.

7.4.3 Résultats préliminaires

Soient $\kappa > 0$, et

$$G_\kappa(x, y) := -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(\kappa |x - y|), \quad \nabla_x G_\kappa(x, y) = \frac{i\kappa}{4} H_1^{(1)}(\kappa |x - y|) \frac{x - y}{|x - y|}, \quad x, y \in \mathbb{R}^2.$$

Notation. Si $\theta \in \mathbb{R}$, \mathcal{R}_θ désigne la matrice de rotation d'angle θ : $\mathcal{R}_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$. ■

Notations. Si $a \neq b \in \mathbb{R}^2$, $\tau_{a \rightarrow b} := \frac{b-a}{|b-a|}$ est un vecteur unitaire tangent au segment $[a, b]$, et $\nu_{a \rightarrow b} := \mathcal{R}_{\pi/2} \left(\frac{a-b}{|a-b|} \right)$ est une normale unitaire au segment $[a, b]$. ■

Notations. Soient $a \neq b$ et $c \neq d$ dans \mathbb{R}^2 tels que les segments $[a, b]$ et $[c, d]$ soient disjoints s'ils n'ont aucune extrémité en commun. Soit $\nu \in \mathbb{R}^2$. On note

$$I_\kappa(a, b, c, d) := \frac{1}{|b-a| |d-c|} \int_{[a,b]} \int_{[c,d]} G_\kappa(x, y) d\sigma(y) d\sigma(x),$$

$$J_\kappa(a, b, c, d, \nu) := \frac{1}{|b-a| |d-c|} \int_{[a,b]} \int_{[c,d]} \partial_\nu G_\kappa(x, y) d\sigma(y) d\sigma(x),$$

où $\partial_\nu G_\kappa(x, y) = \nabla_x G_\kappa(x, y) \cdot \nu$. ■

Notation. Soient x et $c \neq d$ dans \mathbb{R}^2 . On pose

$$K_\kappa(x, c, d) := \frac{1}{|d-c|} \int_{[c,d]} G_\kappa(x, y) d\sigma(y).$$

■

Notre objectif est de calculer des intégrales de type $I_\kappa(a, b, c, d)$, $J_\kappa(a, b, c, d, \nu)$ ou $K_\kappa(x, c, d)$, en distinguant naturellement les cas où l'intégrande est singulier des cas où il est non singulier.

Cas régulier

Dans le cas où les segments $[a, b]$ et $[c, d]$ sont disjoints, $I_\kappa(a, b, c, d)$ et $J_\kappa(a, b, c, d, \nu)$ sont des intégrales de fonctions non singulières, et s'évaluent donc par quadrature. De même, dans le cas où $x \notin [c, d]$, $K_\kappa(x, c, d)$ est une intégrale d'une fonction non singulière, et s'évalue donc par quadrature.

Proposition 7.6. *Soient $a \neq b$ et $c \neq d$ dans \mathbb{R}^2 tels que les segments $[a, b]$ et $[c, d]$ soient disjoints. Alors $I_\kappa(a, b, c, d)$ et $J_\kappa(a, b, c, d, \nu)$ s'évaluent selon la sous-section 7.4.2.*

Proposition 7.7. *Soient $c \neq d$ dans \mathbb{R}^2 et $x \notin [c, d]$. Alors $K_\kappa(x, c, d)$ s'évalue selon la sous-section 7.4.2.*

Cas singulier

Dans le cas où les segments $[a, b]$ et $[c, d]$ sont adjacents ou égaux, $I_\kappa(a, b, c, d)$ et $J_\kappa(a, b, c, d, \nu)$ sont des intégrales de fonctions singulières. De même, si $x \in [c, d]$, $K_\kappa(x, c, d)$ est une intégrale d'une fonction singulière. Pour évaluer ces intégrales, on va décomposer l'intégrande en une partie régulière, et une partie contenant la singularité ; l'intégrale de la partie régulière est évaluée par quadrature, quant à la partie singulière, on utilise une formule exacte, avant d'effectuer une quadrature si nécessaire.

G_κ admet la décomposition suivante [12] :

Lemme 7.8. *Pour x et y proches,*

$$G_\kappa(x, y) \approx \frac{1}{2\pi} \log |x - y| + \varphi(|x - y|),$$

où

$$\varphi(r) := \frac{1}{2\pi} (\log \kappa + \gamma - \log 2) - \frac{i}{4} - \frac{1}{4 \cdot 2\pi} \left(\log(\kappa r) - (\gamma - \log 2 - \frac{i\pi}{2} - 1) \right) (\kappa r)^2.$$

La partie en $\frac{1}{2\pi} \log$ est la partie singulière, la partie en φ est la partie non singulière.

Comme dans [27], la formule exacte que nous utilisons pour évaluer l'intégrale de la partie singulière provient de [16] :

Lemme 7.9. *Soient x et $c \neq d$ dans \mathbb{R}^2 . Alors on a :*

$$\begin{aligned} 2\pi f_{c,d}(x) &:= \int_{[c,d]} \log |x - y| d\sigma(y) \\ &= (d - x) \cdot \tau \log |d - x| - (c - x) \cdot \tau \log |c - x| - |d - c| + \beta |c - x| \cdot n \end{aligned}$$

avec $\tau := \frac{d-c}{|d-c|}$, $n := \mathcal{R}_{\pi/2}(\tau)$, et $\beta(x) := \arccos \frac{(d-x) \cdot (c-x)}{|d-x||c-x|} \in [0, \pi]$ (pour $x \in \{c, d\}$, on emploie la convention $0 \log 0 = 0$ et $\beta(x) = 0$).

$f_{c,d}$ se calcule explicitement et est non singulière.

Une conséquence des Lemmes 7.8 et 7.9 est un moyen de calcul de K_κ et I_κ dans le cas singulier, pourvu que les segments d'intégration soient de petite longueur.

Proposition 7.10. *Soient c, d dans \mathbb{R}^2 tels que $c \neq d$, $[c, d]$ est petite longueur et $x \in [c, d]$. Alors*

$$K_\kappa(x, c, d) \approx \frac{1}{|d - c|} f_{c,d}(x) + \frac{1}{|d - c|} \int_{[c,d]} \varphi(|x - y|) d\sigma(y).$$

Le premier terme se calcule explicitement ; quant au second, il peut être évalué numériquement selon la sous-section 7.4.2.

Proposition 7.11. *Soient $a \neq b$ et $c \neq d$ dans \mathbb{R}^2 tels que les segments $[a, b]$ et $[c, d]$ soient adjacents ou égaux, et de petite longueur. Alors*

$$I_\kappa(a, b, c, d) \approx \frac{1}{|b-a||d-c|} \int_{[a,b]} \int_{[c,d]} \varphi(|x-y|) d\sigma(y) d\sigma(x) + \frac{1}{|b-a|} \int_{[a,b]} \frac{1}{|d-c|} f_{c,d}(x) d\sigma(x).$$

Les deux termes sont évalués selon la sous-section 7.4.2.

Lemme 7.12. *Soit $a \neq b$ dans \mathbb{R}^2 . On a pour x et y proches :*

$$\nabla_x G_\kappa(x, y) \approx \frac{1}{2\pi |x-y|} \frac{x-y}{|x-y|} + \varphi'(|x-y|) \frac{x-y}{|x-y|}$$

avec

$$\varphi'(|x-y|) \frac{x-y}{|x-y|} = -\frac{\kappa^2}{4 \cdot 2\pi} \left[1 - 2(\gamma - \log 2 - \frac{i\pi}{2} - 1) + 2 \log(\kappa |x-y|) \right] (x-y).$$

Le premier terme est la partie singulière de $\nabla_x G_\kappa(x, y)$, le second en est la partie non singulière.

Comme dans [27], nous allons nous aider d'une formule exacte issue de [16] pour l'intégrale de la partie singulière de $\partial_\nu G_\kappa$:

Lemme 7.13. *Soient x et $a \neq b$ dans \mathbb{R}^2 . Alors*

$$\begin{aligned} g_{a,b}(x) &:= - \int_{[a,b]} \frac{1}{2\pi |x-y|} \frac{x-y}{|x-y|} \cdot \nu_{a \rightarrow b} d\sigma(y) \\ &= -\frac{\beta(x)}{2\pi} \text{signe}((a-x) \cdot \nu_{a \rightarrow b}) \end{aligned}$$

avec $\beta(x) := \arccos \frac{(b-x) \cdot (a-x)}{|b-x||a-x|} \in [0, \pi]$ (ou $:= 0$ si $x \in \{a, b\}$).
 $g_{a,b}$ se calcule explicitement et est non singulière.

Par ailleurs, un simple calcul d'intégrale montre :

Lemme 7.14. *Soient $x, a, b \in \mathbb{R}^2$ deux à deux distincts. Alors*

$$\begin{aligned} h_{a,b}(x) &:= - \int_{[a,b]} \frac{1}{2\pi |x-y|} \frac{x-y}{|x-y|} \cdot \tau_{a \rightarrow b} d\sigma(y) \\ &= -\frac{1}{2\pi} \log \frac{|x-a|}{|x-b|}. \end{aligned}$$

$h_{a,b}$ est singulière.

Lemme 7.15. *Soient $a \neq b$ et $c \neq d$ dans \mathbb{R}^2 . Alors*

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} \int_{[c,d]} \frac{1}{2\pi |x-y|} \frac{x-y}{|x-y|} \cdot \nu_{a \rightarrow b} d\sigma(y) d\sigma(x) &= \int_{[c,d]} g_{a,b}(x) d\sigma(x), \\ \int_{[a,b]} \int_{[c,d]} \frac{1}{2\pi |x-y|} \frac{x-y}{|x-y|} \cdot \tau_{a \rightarrow b} d\sigma(y) d\sigma(x) &= \int_{[c,d]} h_{a,b}(x) d\sigma(x) = f_{c,d}(b) - f_{c,d}(a). \end{aligned}$$

On déduit des précédents Lemmes un moyen de calcul de J_κ dans le cas singulier :

Proposition 7.16. *Soient $a \neq b$ et $c \neq d$ dans \mathbb{R}^2 tels que les segments $[a, b]$ et $[c, d]$ soient adjacents ou égaux, et de petite longueur. Soit $\nu = \nu_1 \nu_{a \rightarrow b} + \nu_2 \tau_{a \rightarrow b}$. Alors*

$$\begin{aligned} J_\kappa(a, b, c, d, \nu) &\approx \frac{1}{|b-a||d-c|} \int_{[a,b]} \int_{[c,d]} \varphi'(|x-y|) \frac{x-y}{|x-y|} \cdot \nu d\sigma(y) d\sigma(x) \\ &\quad + \nu_1 \frac{1}{|d-c|} \int_{[c,d]} \frac{1}{|b-a|} g_{a,b}(x) d\sigma(x) + \nu_2 \frac{f_{c,d}(b) - f_{c,d}(a)}{|b-a||d-c|}. \end{aligned}$$

Les intégrales se calculent selon la sous-section 7.4.2, $f_{c,d}(\cdot)$ se calcule explicitement par Lemme 7.9.

7.4.4 Fonction de Green de l'anomalie

On a $G_D = G_{k_D}$. Nous avons donc à notre disposition un moyen de calculs de différentes intégrales faisant intervenir G_D .

7.4.5 Fonction de Green du milieu de fond

Pour $y \in \mathcal{D}^-$, nous avons obtenu $G(\cdot, y)$ sous la forme :

$$G(x, y) = \begin{cases} G_{\text{trans}}(x, y), & x_2 > 0, \\ G_{\text{sour}}(x, y) + G_{\text{refl}}(x, y), & x_2 < 0. \end{cases}$$

Nous allons donner un moyen de calcul de différentes intégrales faisant intervenir G à l'aide de cette décomposition. Les intégrales du terme de transmission G_{trans} et du terme de réflexion G_{refl} seront calculées par quadrature, G_{trans} et G_{refl} ayant été approximées par des fonctions non singulières. Les intégrales du terme source $G_{\text{sour}}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{d}} G_{k^-}(\mathcal{A}^*x, \mathcal{A}^*y)$ se ramènent quant à elles à des intégrales étudiées précédemment.

Notations. Soient $a \neq b$ et $c \neq d$ dans \mathcal{D}^- tels que les segments $[a, b]$ et $[c, d]$ soient disjoints s'ils n'ont aucune extrémité en commun. Soit $\nu \in \mathbb{R}^2$. On note

$$I(a, b, c, d) := \frac{1}{|b-a||d-c|} \int_{[a,b]} \int_{[c,d]} G(x, y) d\sigma(y) d\sigma(x),$$

$$J(a, b, c, d, \nu) := \frac{1}{|b-a||d-c|} \int_{[a,b]} \int_{[c,d]} \partial_\nu G(x, y) d\sigma(y) d\sigma(x),$$

où $\partial_\nu G(x, y) = \nabla_x G(x, y) \cdot \nu$. ■

Notation. Soient $x \in \mathbb{R}^2$ et $c \neq d$ dans \mathcal{D}^- . On pose

$$K(x, c, d) := \frac{1}{|d-c|} \int_{[c,d]} G(x, y) d\sigma(y).$$
■

Par un changement de variable, on montre la proposition et le lemme suivants ($\tilde{y} = \mathcal{A}^*y$ pour la proposition et $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (\mathcal{A}^*x, \mathcal{A}^*y)$ pour le lemme) :

Proposition 7.17. *Soient $x \in \mathcal{D}^-$ et $c \neq d$ dans \mathcal{D}^- . Alors*

$$K(x, c, d) = \frac{1}{\sqrt{d}} K_{k^-}(\mathcal{A}^*x, \mathcal{A}^*c, \mathcal{A}^*d) + \frac{1}{|d-c|} \int_{[c,d]} G_{\text{refl}}(x, y) d\sigma(y),$$

le deuxième terme étant évalué selon la sous-section 7.4.2.

Lemme 7.18. *Soient $a \neq b$ et $c \neq d$ dans \mathcal{D}^- . Alors :*

$$\frac{1}{|b-a||d-c|} \int_{[a,b]} \int_{[c,d]} G_{k^-}(\mathcal{A}^*x, \mathcal{A}^*y) d\sigma(y) d\sigma(x) = I_{k^-}(\mathcal{A}^*a, \mathcal{A}^*b, \mathcal{A}^*c, \mathcal{A}^*d);$$

$$\frac{1}{|b-a||d-c|} \int_{[a,b]} \int_{[c,d]} \partial_\nu G_{k^-}(\mathcal{A}^*x, \mathcal{A}^*y) d\sigma(y) d\sigma(x) = J_{k^-}(\mathcal{A}^*a, \mathcal{A}^*b, \mathcal{A}^*c, \mathcal{A}^*d, \mathcal{A}^*\nu),$$

où $\nu \in \mathbb{R}^2$ et $\partial_\nu G_{k^-}(\mathcal{A}^*x, \mathcal{A}^*y) = (\nabla_x G_{k^-})(\mathcal{A}^*x, \mathcal{A}^*y) \cdot \mathcal{A}^*\nu$.

Proposition 7.19. *Soient $a \neq b$ et $c \neq d$ dans \mathcal{D}^- tels que les segments $[a, b]$ et $[c, d]$ soient disjoints s'ils n'ont aucune extrémité en commun. Soit $\nu \in \mathbb{R}^2$. Alors*

$$I(a, b, c, d) = \frac{1}{\sqrt{d}} I_{k^-}(\mathcal{A}^*a, \mathcal{A}^*b, \mathcal{A}^*c, \mathcal{A}^*d) + \frac{1}{|b-a||d-c|} \int_{[a,b]} \int_{[c,d]} G_{\text{refl}}(x, y) d\sigma(y) d\sigma(x),$$

$$J(a, b, c, d, \nu) = \frac{1}{\sqrt{d}} J_{k^-}(\mathcal{A}^*a, \mathcal{A}^*b, \mathcal{A}^*c, \mathcal{A}^*d, \mathcal{A}^*\nu) + \frac{1}{|b-a||d-c|} \int_{[a,b]} \int_{[c,d]} \partial_\nu G_{\text{refl}}(x, y) d\sigma(y) d\sigma(x),$$

les intégrales étant évalués selon la sous-section 7.4.2.

Proposition 7.20. *Soient $x \in \mathcal{D}^+$ et $c \neq d$ dans \mathcal{D}^- . Alors*

$$K(x, c, d) = \frac{1}{|d - c|} \int_{[c, d]} G_{\text{trans}}(x, y) d\sigma(y),$$

est évalué selon la sous-section 7.4.2.

7.5 Éléments finis de frontière

7.5.1 Introduction

La formule de représentation intégrale conduit à une méthode numérique de résolution du problème. En effet, elle repose sur un système d'équations intégrales que nous avons écrit sous forme variationnelle. Cette formulation se prête au numérique, par la méthode dite des éléments finis de frontière.

En discrétisant le bord de l'anomalie et les espaces fonctionnels, le système intégral conduit à un système linéaire que nous allons présenter. Il est plein, et les éléments qui le composent sont à base d'intégrales dont nous avons présentées une méthode d'évaluation.

7.5.2 Discrétisation

On se donne un entier N suffisamment grand. On approche la frontière ∂D par le polygone $\partial D^N := (x_0, \dots, x_{N-1})$, où $x_i := \gamma(2\pi i/N)$.

Pour α^N une fonction sur le bord discrétisé ∂D^N , on note

$$\mathcal{S}^N \alpha^N(x) := \int_{\partial D^N} G(x, y) \alpha^N(y) d\sigma(y), \quad \mathcal{S}_D^N \alpha^N(x) := \int_{\partial D^N} G_D(x, y) \alpha^N(y) d\sigma(y),$$

$$\mathcal{K}^{*N} \alpha^N(x) := \int_{\partial D^N} \partial_{\nu_{\mathcal{A}}^N} G(x, y) \alpha^N(y) d\sigma(y), \quad \mathcal{K}_D^{*N} \alpha^N(x) := \int_{\partial D^N} \partial_{\nu_x^N} G_D(x, y) \alpha^N(y) d\sigma(y),$$

avec $\nu_x^N := \nu_{x_i \rightarrow x_{i+1}}$ pour $x \in]x_i, x_{i+1}[$, $\partial_{\nu_x^N} * (x, y) := \nabla_x * (x, y) \cdot \nu_x^N$ et $\partial_{\nu_{\mathcal{A}}^N} * (x, y) := \nabla_x * (x, y) \cdot \mathcal{A}^T \nu_x^N$.

Nous discrétisons par interpolation \mathbb{P}_0 . On travaille ainsi dans l'espace des fonctions v telles que pour tout i , $v|_{]x_i, x_{i+1}[}$ est constant. Une base de cet espace est $(P_i := \frac{1}{|x_{i+1} - x_i|} \mathbb{1}_{]x_i, x_{i+1}[})_{0 \leq i \leq N-1}$. On approche ainsi φ et ψ respectivement par φ^N et ψ^N , écrits sous la forme :

$$\varphi^N = \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_i P_i \text{ et } \psi^N = \sum_{i=0}^{N-1} \psi_i P_i,$$

où les constantes φ_i et ψ_i sont les inconnues.

7.5.3 Système linéaire

Le problème variationnel, écrit sur l'espace discrétisé, est le système linéaire :

$$\begin{bmatrix} \clubsuit & \diamond \\ \heartsuit & \spadesuit \end{bmatrix} \Xi = F, \quad (7.2)$$

où

1. l'inconnue est

$$\Xi = \begin{bmatrix} (\varphi_i)_i \\ (\psi_i)_i \end{bmatrix};$$

2. la matrice du système est constituée de matrices $N \times N$, \clubsuit , \diamond , \heartsuit et \spadesuit , dont les éléments d'indice (j, i) (j est l'indice de ligne, i est l'indice de colonne) sont respectivement :

$$\clubsuit_{ji} = -\langle \mathcal{S}^N P_i, P_j \rangle = -I(x_j, x_{j+1}, x_i, x_{i+1}),$$

$$\diamond_{ji} = \langle \mathcal{S}_D^N P_i, P_j \rangle = I_{k_D}(x_j, x_{j+1}, x_i, x_{i+1}),$$

$$\begin{aligned} \heartsuit_{ji} &= -\left(\frac{1}{2} \langle P_i, P_j \rangle + \langle \mathcal{K}^{*N} P_i, P_j \rangle \right) \\ &= -\left(\frac{1}{2|x_{i+1} - x_i|} \delta_{ij} + J(x_j, x_{j+1}, x_i, x_{i+1}, \mathcal{A}^T \nu_{x_j \rightarrow x_{j+1}}) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \spadesuit_{ji} &= \frac{1}{\mu_D} \left(-\frac{1}{2} \langle P_i, P_j \rangle + \langle \mathcal{K}_D^{*N} P_i, P_j \rangle \right) \\ &= \frac{1}{\mu_D} \left(-\frac{1}{2|x_{i+1} - x_i|} \delta_{ij} + J_{k_D}(x_j, x_{j+1}, x_i, x_{i+1}, \nu_{x_j \rightarrow x_{j+1}}) \right), \end{aligned}$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker ;

3. le second membre est

$$F = \begin{bmatrix} (\langle U, P_j \rangle)_j \\ \left(\langle \partial_{\mathcal{A}^T \nu_{x_j \rightarrow x_{j+1}}} U, P_j \rangle \right)_j \end{bmatrix},$$

où $\partial_{\mathcal{A}^T \nu_{x_j \rightarrow x_{j+1}}} U = \nabla U \cdot \mathcal{A}^T \nu_{x_j \rightarrow x_{j+1}}$.

Les éléments de la matrice du système se calculent donc à partir de ce que l'on a fait dans la section 7.4. Le second membre est quant à lui constitué d'intégrales non singulières :

$$\begin{aligned} \langle U, P_j \rangle &= \frac{1}{|x_{j+1} - x_j|} \int_{[x_j, x_{j+1}]} U(x) d\sigma(x), \\ \langle \partial_{\mathcal{A}^T \nu_{x_j \rightarrow x_{j+1}}} U, P_j \rangle &= \frac{1}{|x_{j+1} - x_j|} \int_{[x_j, x_{j+1}]} \partial_{\mathcal{A}^T \nu_{x_j \rightarrow x_{j+1}}} U(x) d\sigma(x) \end{aligned}$$

que l'on calcule donc selon la sous-section 7.4.2.

Nous résolvons, ce système linéaire (plein), par exemple, par la méthode du pivot de Gauss.

7.5.4 Solution

La solution u est obtenue au final grâce à la représentation intégrale :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathcal{D}^+ \cup (\mathcal{D}^- \setminus \overline{D}), \quad u(x) &\approx U(x) + \mathcal{S}^N \varphi^N(x) \\ &\approx U(x) + \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_i K(x, x_i, x_{i+1}), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \forall x \in D, \quad u(x) &\approx \mathcal{S}_D^N \psi^N(x) \\ &\approx \sum_{i=0}^{N-1} \psi_i K_{k_D}(x, x_i, x_{i+1}). \end{aligned}$$

Les φ_i et les ψ_i proviennent de la résolution du système (7.2), et les K et K_{k_D} se calculent selon la section 7.4.

Remarque. Numériquement, en identifiant les points à des complexes, pour tester si un point x est à l'intérieur du polygone (x_0, \dots, x_{N-1}) , on calcule l'indice de Cauchy [37] du point par rapport au polygone : $\sum_{i=0}^{N-1} \arg((x_{i+1} - x)/(x_i - x))$, où l'angle $\arg(x_{i+1} - x)/(x_i - x)$ est dans $(-\pi, \pi)$. On trouve 0 si et seulement si le point est à l'extérieur du polygone. ■

7.6 Conclusion

Nous avons étudié un problème d'inclusion enfouie dans notre modèle de milieu fluctuant avec une couche rugueuse. En supposant que l'inclusion est suffisamment grosse et suffisamment en profondeur, nous avons approché le milieu de fond par le milieu effectif précédemment formulé et étudié. La solution du problème peut alors être formulée sous forme de représentation intégrale simple couche, à partir de la solution et de la fonction de Green du problème de fond (effectif). Cette formule fait intervenir un couple de fonctions, solution d'un système d'équations intégrales. Formulé variationnellement, puis discrétisé par la méthode des éléments finis de frontière, ce système conduit à un système linéaire plein, dont les éléments sont des intégrales. Pour calculer ce système, nous avons présenté des formules de quadrature pour évaluer les intégrales régulières ; nous avons également isolé les singularités des fonctions de Green pour en fournir des intégrales exactes. L'inversion du système et la formule de décomposition intégrale permettent *in fine* de remonter à la solution.

Résultats numériques

8.1 Introduction

Nous avons implémenté la résolution numérique d'un problème modèle de peau, dans un programme orienté objet, en C++. Nous référons à l'annexe A pour plus de détails sur la structure du code.

Un milieu effectif est tout d'abord obtenu par analyse asymptotique. Les problèmes de cellule en jeu sont résolus par éléments finis, via l'appel à des programmes externes, que nous avons écrits en **Freefem++**. La solution dans ce milieu effectif est alors explicite. Quant à la fonction de Green, elle est calculée par la méthode de plus forte de descente. Les pôles de la fonction spectrale sont calculés par résolution d'un système polynômial, par un programme externe **Maple** que nous avons développé. Enfin, la solution du problème avec une anomalie, est obtenue par représentation intégrale, après résolution d'un système d'équations intégrales par éléments finis de frontière. Nous avons ici tout écrit en C++.

À titre d'illustration, nous présentons quelques résultats que nous avons obtenus sur un test. Nous montrons tout d'abord la solution des problèmes de cellule. Puis, nous montrons la solution effective du problème, ainsi que la fonction de Green associée. Enfin, nous montrons l'onde diffractée ainsi que l'onde totale, dans le cas où un objet est enfoui dans le milieu.

8.2 Tests

8.2.1 Entrées

Les paramètres sont fixés comme suit. Pour le problème de fond, la pulsation est $\omega = 1$, l'angle de l'onde incidente est $\theta = -0.5$. Dans le milieu supérieur, la permittivité est $\varepsilon_+ = 0.1$, la perméabilité est $\mu_+ = 0.1$. La couche rugueuse est $\{0 < x_2 < \xi f(x_1/\xi)\}$, avec $f(t) = \cos(2\pi t + 1)/4 + 0.7$, et $\xi = 5$; sa permittivité est $\varepsilon_{cl} = 2$, et sa perméabilité est $\mu_{cl} = 1$. Pour le milieu inférieur, la cellule de référence est $Y = (0, 1.2) \times (0, 1)$, de permittivité $\varepsilon = 0.32$, et perméabilité $\mu = 0.32$. La cellule Y contient un B ; il s'agit d'une ellipse d'axes $a = 0.2$ et $b = 0.5$, tournée de $\theta = 0.8$, de centre $(0.5, 0.5)$, discrétisée en 100 points. Sa permittivité est $\varepsilon_B = 2$, sa perméabilité est $\mu_B = 3$. Dans ce modèle de fond périodique, on ajoute une étoile D à 5 branches, de rayon de l'ordre de 40, discrétisée en $N = 50$ points, de permittivité $\varepsilon_D = 0.5$, et de perméabilité $\mu_D = 0.5$.

8.2.2 Analyse asymptotique

Les solutions χ_1 et χ_2 des problèmes de cellule de l'homogénéisation, ainsi que la solution $\Psi_0 = (\Psi_0^1, \Psi_0^2)$ du problème de cellule de la couche sont représentées sur la Figure 8.1. Ces solutions permettent de calculer les divers paramètres effectifs. Ainsi, l'homogénéisation du milieu inférieur

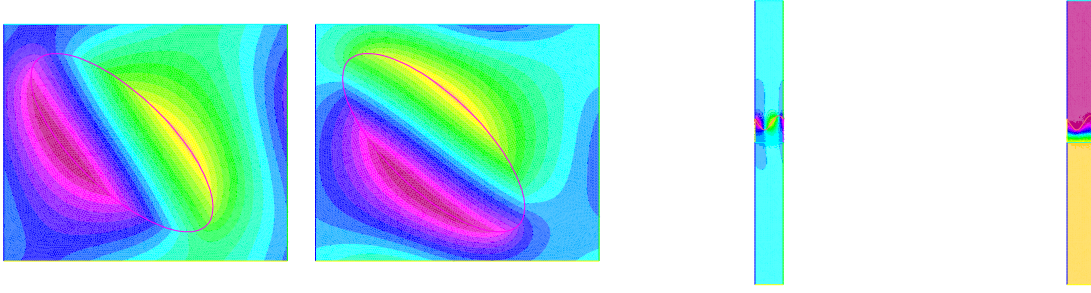


FIG. 8.1: Solutions des problèmes de cellule pour obtenir le milieu effectif. De la gauche vers la droite, on lit les solutions χ_1 et χ_2 des problèmes de cellule de l'homogénéisation, puis les solutions Ψ_0^1 et Ψ_0^2 des problèmes de cellule de la couche.

conduit aux paramètres effectifs :

$$A^* = \begin{bmatrix} 1.938 & -0.2837 \\ -0.2837 & 1.990 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon^* = 0.7598,$$

et les conditions de transmission sont obtenues en fonction des coefficients :

$$\psi_0 = (-1.192e - 05, 5.303), \quad G_1^{(1)} = (0.9965, -3.402e - 05), \quad G_1^{(2)} = (0, -6.300), \quad G_1^{(3)} = 0.700.$$

Ces solutions éléments finis sont très régulières et des très bonnes approximations. Concernant l'homogénéisation, on observe bien la périodicité : la trace sur un bord coïncide avec la trace sur le bord opposé. Quant à la couche, on observe bien la décroissance exponentielle de la solution. Concluons, en rappelant l'intérêt de l'analyse asymptotique : elle transforme quasi-instantanément le problème initial insoluble, même numériquement, en un problème effectif beaucoup plus facile, tant sur le plan théorique que numérique.

8.2.3 Problème effectif

On s'intéresse au problème effectif issu de l'étape d'analyse asymptotique. On représente sa solution U et ses composantes sur la Figure 8.2. On représente sa fonction de Green G pour le point source $y(0, -50)$ sur la Figure 8.3. Les termes de réflexion et de transmission de la solution sont des ondes planes. Concernant la fonction de Green, sa partie source décroît en s'éloignant du point source, et ses lignes de niveau sont des ellipses par anisotropie. Sa part de réflexion s'apparente à une onde provenant de l'interface, avec deux directions de réflexion privilégiées ; quant au terme de transmission, il s'apparente à une onde sphérique en provenance de l'interface, s'atténuant le long de l'interface.

8.2.4 Problème avec objet dissimulé

Nous représentons désormais la solution du problème d'une anomalie dans le milieu effectif. On représente la partie diffractée $u - U$ de la solution sur la Figure 8.4, et la solution u elle-même sur la Figure 8.5. Les résultats paraissent raisonnables. La solution est continue à travers la frontière de l'anomalie. L'onde diffractée s'apparente bien à une onde diffractée. Elle est fortement marquée par la fonction de Green de fond, et notamment par sa partie de réflexion. Dans le milieu inférieur, la solution est nettement marquée par la solution du milieu de fond et la fonction de Green. Dans le milieu supérieur, on constate que la part diffractée de la solution est faible par rapport à la part de la solution de fond.

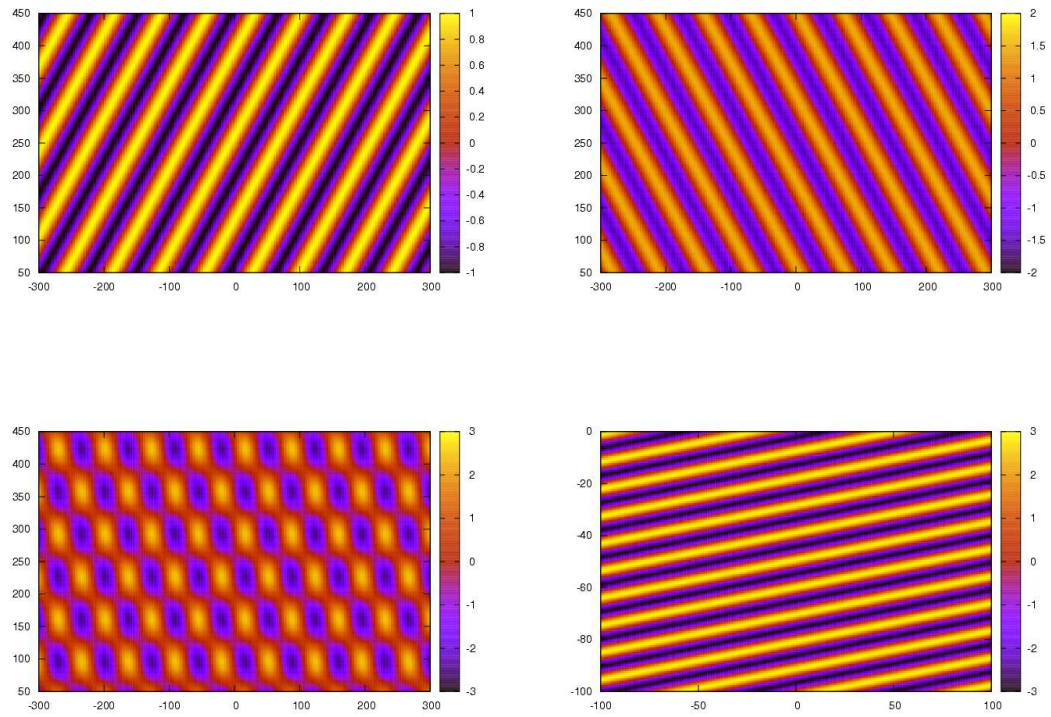


FIG. 8.2: Représentation de la partie réelle de la solution effective et des ses composantes. Sur la première ligne, on lit l'onde incidente (à gauche) et l'onde réfléchie (à droite) dans le demi-espace supérieur. Sur la deuxième ligne, on lit l'onde totale dans le demi-espace supérieur (à gauche), et l'onde transmise dans le demi-espace inférieur (à droite).

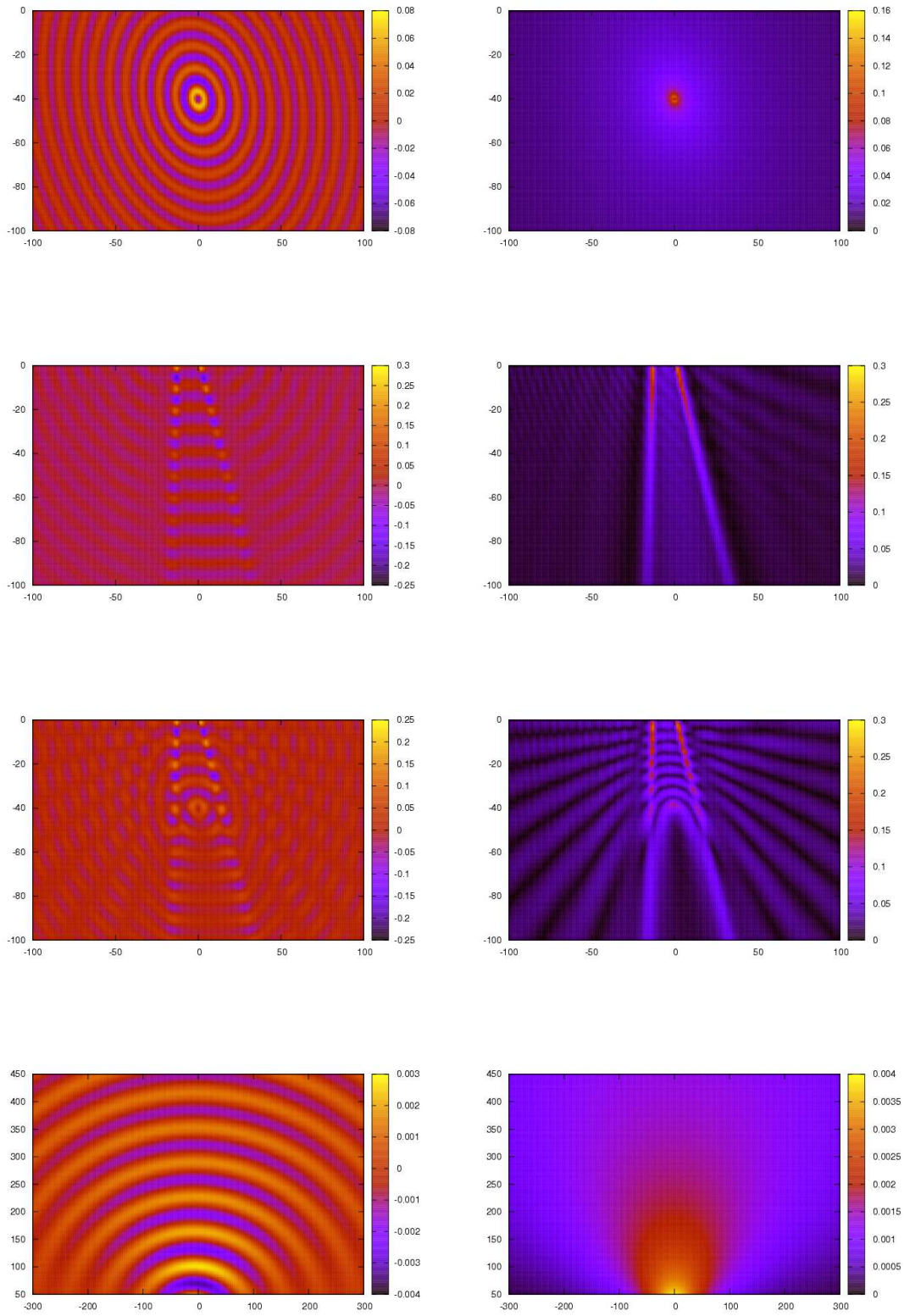


FIG. 8.3: Représentation de la fonction de Green et de ses composantes pour le point source $y(0, -50)$. La première colonne contient la partie réelle, la deuxième contient le module. Du haut vers le bas, on lit le terme source, le terme réfléchi, et leur somme dans le demi-espace inférieur, puis le terme transmis dans le demi-espace supérieur.

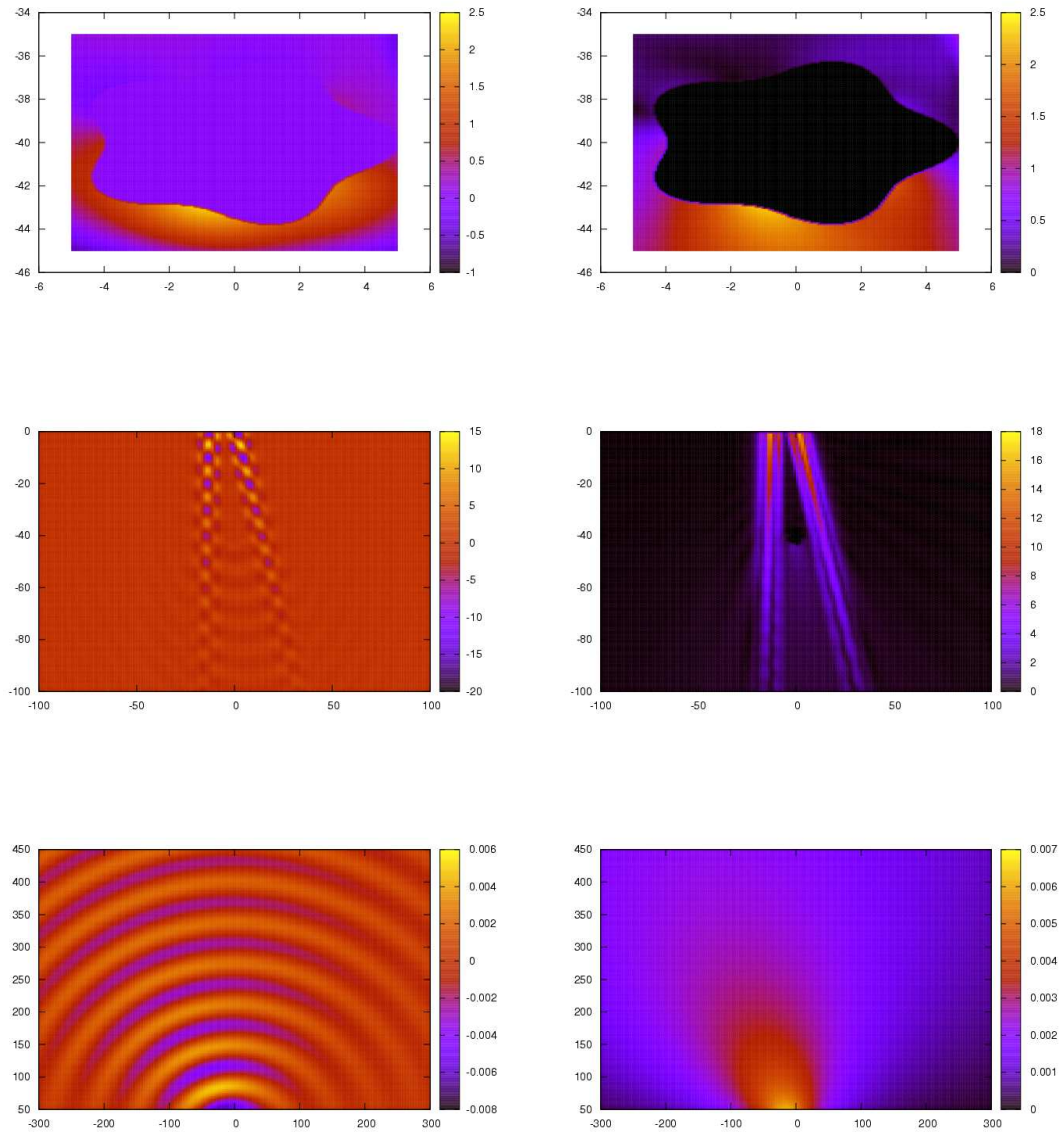


FIG. 8.4: Représentation de l'onde diffractée en présence d'une anomalie. La première colonne contient la partie réelle, la deuxième contient le module.

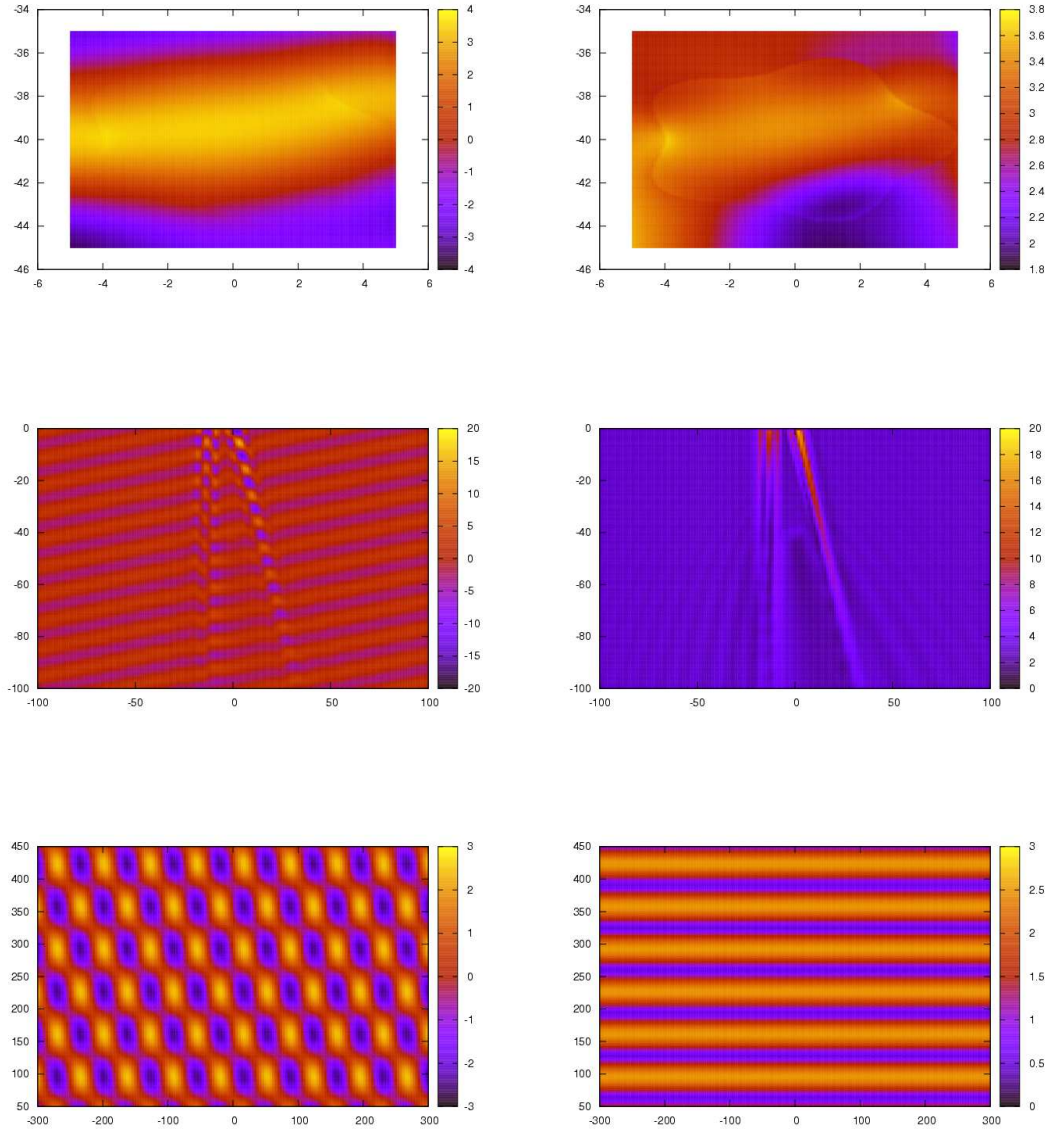


FIG. 8.5: Représentation de l'onde en présence d'une anomalie. La première colonne contient la partie réelle, la deuxième contient le module. Du haut vers le bas, on lit le résultat au voisinage de l'anomalie, dans le demi-espace inférieur, puis dans le demi-espace supérieur.

Conclusion

Nous avons étudié un problème modèle de propagation des ondes dans un milieu de camouflage contenant un objet. Le milieu de camouflage est à base d'une structure inhomogène et d'une couche rugueuse. L'objet est quant à lui dissimulé à l'intérieur de la structure. Ce modèle est général, et peut représenter un engin explosif improvisé caché, ou une tumeur dans la peau. Le chemin que nous avons suivi pour résoudre ce problème a été le suivant. Par des techniques asymptotiques, nous avons obtenu un milieu effectif original. Ensuite, nous avons calculé la solution et la fonction de Green de ce milieu effectif. Enfin, la solution du problème avec un objet a été calculée par la méthode des équations intégrales.

Il conviendrait désormais d'étendre nos résultats à des modèles plus réalistes. Plus particulièrement, l'ajout de la troisième dimension, et de l'aléatoire sont les nouvelles marches à franchir. Le chemin que nous avons emprunté devrait constituer une bonne démarche à suivre. D'autre part, cette étude constitue la partie « problème direct » du problème d'imagerie laser d'un objet dissimulé. Elle fournit un modèle physique, et l'étude a débouché sur un code de résolution numérique. Le modèle permet de poser le problème d'imagerie, et le code permet de simuler les données requises pour l'imagerie. En définitive, la résolution du problème d'imagerie de l'objet dissimulé, le « problème inverse », est désormais envisageable .

Deuxième partie

Algorithmes d'inversion

Chapitre 10

Introduction

La division Optronique de la société THALES souhaiterait créer un système d'imagerie tri-dimensionnelle. Le type d'applications visées concernent l'identification d'objets, notamment les IED (*Improvised Explosive Devices*). Le système posséderait un laser d'une certaine fréquence destiné à illuminer l'objet cible à imager, en champ lointain. D'autre part, le système posséderait un récepteur qui mesure l'intensité de l'onde rétrodiffusée à la suite de l'illumination. La Figure 10.1 schématise l'expérience réalisée par un tel dispositif pour prendre une mesure. Pour obtenir des informations

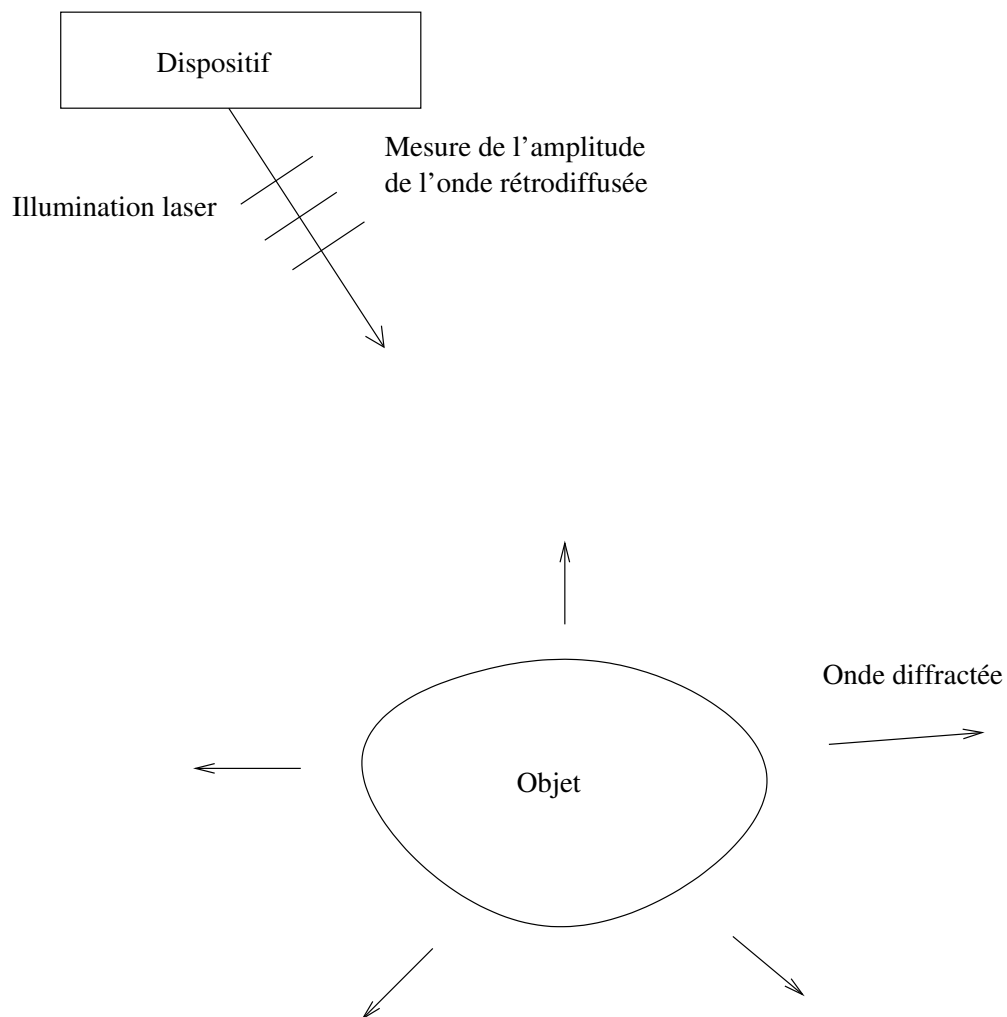


FIG. 10.1: Dispositif d'identification d'un objet : prise d'une mesure

sur l'objet, l'idée serait de varier la localisation du système afin de changer l'angle d'éclairage. Ceci fournirait alors un ensemble de mesures à traiter mathématiquement et numériquement pour

reconstruire l'objet.

Un tel système d'imagerie est monofréquentiel : une seule fréquence est exploitée. Il est monostatique : les sources d'illuminations et les récepteurs sont confondus. Les mesures contiennent l'intensité, ou de façon équivalente l'amplitude, mais ne contiennent pas la phase. Enfin, en pratique, le plus souvent, la vue est partielle : une partie de l'objet reste toujours dans l'ombre, c'est-à-dire n'est jamais illuminée. Ainsi, les mesures dont on dispose sont pauvres en information ; ceci rend la phase de reconstruction particulièrement difficile.

Dans cette partie, nous développons des techniques modèles de reconstruction d'un objet par un tel dispositif. Elles seront à étendre pour des problèmes plus réalistes. L'objet est ainsi supposé être dans l'espace libre. L'étude tri-dimensionnelle est réduite à un modèle bi-dimensionnel régi par l'équation de Helmholtz. Comme le pointage par laser suppose implicitement connue une estimation de la position de la cible, nous supposons sans restriction que l'objet est près de l'origine. Par ailleurs, en admettant que l'on connaisse le type d'objet recherché, nous supposons connus ses paramètres électromagnétiques.

Nous proposons une méthode directe d'inversion de mesures d'amplitude en vue partielle. Elle est basée sur une approximation haute-fréquence de la physique du problème ; elle tend à chercher les disques infinitésimaux qui rétrodiffusent une onde dont la phase permet de transporter convenablement les mesures d'une droite vers les mesures d'une autre droite. Cette recherche s'effectue par le calcul d'une dérivée topologique que l'on souhaite très négative. La méthode proposée est donc de type analyse de dérivée topologique.

D'autre part, nous développons une méthode itérative d'inversion de mesures d'amplitude, accompagnées ou non de la phase. Il s'agit d'une méthode de type descente de gradient, inspirée des méthodes de l'optimisation de forme. Elle repose sur le calcul du gradient d'une fonction coût, que nous exprimons à l'aide de la fonction de Green du milieu avec cible. Nous envisageons ici les cas de la vue totale et de la vue partielle.

Cette partie s'organise de la façon suivante. D'abord, nous formulons mathématiquement notre problème modèle de reconstruction. Puis, nous exposons notre méthode directe d'inversion. Enfin, le dernier chapitre porte sur la méthode itérative.

Présentation du problème inverse

11.1 Problème direct

11.1.1 Problème considéré

On considère l'espace libre \mathbb{R}^2 avec permittivité ε_0 et perméabilité μ_0 . La pulsation des ondes considérées est $\omega > 0$ fixée. Le nombre d'onde associé est $k_0 := \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$, et la longueur d'onde est $\lambda := \frac{2\pi}{k_0}$. On ajoute dans ce milieu une inclusion D de permittivité $\varepsilon_* > 0$ et perméabilité $\mu_* > 0$. Le nombre d'onde associé est $k_* := \omega \sqrt{\varepsilon_* \mu_*}$. On éclaire D par une onde incidente plane d'angle η : $u_{\text{inc}}(\eta, x) = e^{ik_0 \eta \cdot x}$. On obtient alors l'onde $u[D](\eta, x) = u(x)$, solution de :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu_*} \mathbb{1}_D + \frac{1}{\mu_0} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}} \right) \nabla u + \omega^2 (\varepsilon_* \mathbb{1}_D + \varepsilon_0 \mathbb{1}_{\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}}) u = 0, \\ + \text{condition de radiation sortante.} \end{cases}$$

Dans $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$, $u[D](\eta, x)$ est la superposition de l'onde incidente $u_{\text{inc}}(\eta, x)$, et de l'onde diffractée $u_{\text{dif}}[D](\eta, x) := u[D](\eta, x) - u_{\text{inc}}(\eta, x)$.

11.1.2 Calcul de la solution

On note $G_\kappa(x, y) := -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(\kappa |x - y|)$ la fonction de Green sortante d'un espace de nombre d'onde κ . On définit alors les opérateurs

$$\mathcal{S}_{D, \kappa}[\varphi](x) := \int_{\partial D} G_\kappa(x, z) \varphi(z) d\sigma(z), \quad \mathcal{K}_{D, \kappa}^*[\varphi](x) := \int_{\partial D} \partial_{\nu_x} G_\kappa(x, z) \varphi(z) d\sigma(z).$$

Tout comme dans la première partie de la thèse, pour calculer $u[D](\eta, x)$, on résout l'équation par méthode des équations intégrales. $u[D](\eta, x)$ se décompose à l'aide des opérateurs de simple couche :

$$u[D](\eta, x) = \begin{cases} u_{\text{inc}}(\eta, x) + \mathcal{S}_{D, k_0}[\varphi_D](x), & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}, \\ \mathcal{S}_{D, k_*}[\psi_D](x), & x \in D. \end{cases}$$

(φ_D, ψ_D) est solution d'un système d'équations intégrales sur le bord ∂D , permettant de satisfaire les conditions de transmission sur ∂D :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{S}_{D, k_0} & -\mathcal{S}_{D, k_*} \\ \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{1}{2} + \mathcal{K}_{D, k_0}^* \right) & \frac{1}{\mu_*} \left(\frac{1}{2} - \mathcal{K}_{D, k_*}^* \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_D \\ \psi_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_{\text{inc}}(\eta, \cdot) \\ -\frac{1}{\mu_0} \partial_\nu u_{\text{inc}}(\eta, \cdot) \end{bmatrix}.$$

Il s'agit ainsi de la même décomposition que dans la première partie, à la fonction de Green, et solution du problème de fond près. Nous avons donc adapté le code de la première partie à ce problème pour les simulations numériques. Nous renvoyons à l'annexe B pour un test de validation de ce code.

11.2 Problème inverse

11.2.1 Mesures

On suppose que l'on peut obtenir, par différentes illuminations d'un objet D , un ensemble de mesures portant sur l'onde diffractée. Ceci revient à la connaissance d'une fonction $M[D](\eta, x)$ pour un ensemble de couples d'angle d'incidence η et de point de mesure x . Nous supposons que x parcourt un certain ensemble de mesures Γ , et que pour chaque x , on prend une seule mesure qui porte sur l'onde $u_{\text{dif}}[D](-\frac{x}{|x|}, x)$, issue de l'éclairage d'angle $\eta = -\frac{x}{|x|}$. On connaît donc $M[D](x), x \in \Gamma$, et on dit que l'expérience est monostatique.

Spécifions désormais quelle est cette fonction $M[D]$ portant sur l'onde rétrodiffusée. Les applications qui nous motivent concernent les mesures ne contenant que l'amplitude, définies par $M[D](x) = |u_{\text{dif}}[D](-x/|x|, x)| =: A[D](x)$. Pour comprendre l'impact de l'absence de phase dans les mesures, nous développerons par ailleurs des algorithmes comparatifs pour des mesures contenant amplitude-phase : $M[D](x) = u_{\text{dif}}[D](-x/|x|, x) =: B[D](x)$. Lorsque l'ensemble de mesures Γ contient des points tout autour de l'objet, par exemple si Γ est un cercle, on dit que la vue de l'objet est totale. Sinon, lorsque Γ est une droite par exemple, on dit que la vue est partielle.

11.2.2 Formulation du problème inverse

On suppose qu'un objet D_* est situé à proximité de l'origine, avec pour paramètres électromagnétiques ε_* et μ_* connus. On suppose que l'on connaît des mesures $M[D_*]$ sur un certain ensemble de mesures Γ . Le problème inverse que l'on souhaite résoudre consiste à retrouver la forme de l'objet D_* , en inversant $M[D_*]$ par M , *i.e.* en résolvant :

$$M[D] = M[D_*].$$

Dans un premier temps, nous allons proposer une méthode directe d'inversion des mesures d'amplitude ($M = A$) en vue partielle. Puis, nous développerons une méthode itérative d'inversion de mesures d'amplitude ($M = A$), ou de mesures amplitude-phase ($M = B$), en vue partielle ou totale.

Méthode d'inversion directe

12.1 Introduction

Nous souhaitons développer une méthode d'inversion directe qui retrouve l'objet en une étape (en opposition avec les méthodes itératives). En général, une telle méthode tente de coller à la physique du problème : par la compréhension des phénomènes physiques, elle cherche à connaître l'information contenue dans les mesures pour pouvoir l'exploiter. Elle fournit généralement une estimation très rapide de l'objet, pouvant ensuite servir de bon état initial pour une méthode itérative.

Les applications visées concernent l'inversion de mesures d'amplitude en vue partielle. Nous supposons que nous prenons des mesures d'amplitude sur une droite. Or, les méthodes d'inversion directes usuelles (MUSIC [7], backpropagation method, Kirchhoff migration), exploitent la connaissance de la phase. Il est donc nécessaire de développer une méthode originale.

Pour ajouter de l'information, de façon non restrictive par rapport aux applications, nous supposons que l'on peut prendre les mesures sur une autre droite, parallèle à la première. Ainsi, pour chaque angle d'éclairage, nous disposons de deux mesures d'amplitude prises dans la même direction. Ces deux mesures contiennent une certaine notion de phase. En effet, en approximation haute fréquence, le passage d'une mesure d'amplitude à l'autre s'obtient par une équation de transport avec une certaine phase ; la phase est alors cachée dans le rapport entre les deux mesures.

L'idée est de trouver les petits disques, qui, éclairés, rétrodiffusent une onde dont la phase permet de « transporter » les premières mesures vers les deuxièmes. Cette idée permet ainsi d'exploiter l'information cachée au sujet de la phase. Cette méthode peut être formulée à l'aide d'un coût que l'on cherche à rendre petit. La « validité » d'un point est alors testé par la valeur de la dérivée topologique du coût : un point est bien placé par rapport à l'objet recherché si cette dérivée est très négative. Il s'agit ainsi d'une approche par analyse asymptotique topologique, dans le même esprit que celle conduite dans [14, 9].

Ce chapitre est organisé comme suit. Nous formulons dans un premier temps mathématiquement le problème. Puis, nous présentons la résolution de l'équation de transport par la méthode des caractéristiques, de manière asymptotique. Celle-ci nous permet alors de calculer la dérivée topologique que l'on cherche. Enfin, nous présentons des résultats numériques qui mettent en évidence les propriétés de la reconstruction ainsi effectuée.

12.2 Formulation mathématique

12.2.1 Mesures

On fixe deux droites de mesures parallèles en champ lointain : $\Gamma_0 : x_2 = \gamma_0$ et $\Gamma_1 : x_2 = \gamma_1$, où les constantes $\gamma_0, \gamma_1 > 0$ sont grandes par rapport à la longueur d'onde, avec $\gamma_0 - \gamma_1$ raisonnable (ni trop grand, ni trop petit). On mesure alors l'amplitude rétrodiffusée $A[D_*](x) = |u_{\text{dif}}(x/|x|, x)|$ sur chacune de ces droites. On note $A_0[D_*]$ et $A_1[D_*]$ l'amplitude mesurée respectivement sur Γ_0 et Γ_1 .

12.2.2 Approximation haute fréquence

En haute fréquence, la propagation des ondes peut être approchée par une équation de transport :

$$\nabla A \cdot \nabla \varphi + \frac{1}{2} A \Delta \varphi = 0,$$

où A est l'amplitude de l'onde, et où φ , la phase de l'onde, satisfait une équation eikonale.

Dans [26], le résultat de l'approximation haute fréquence est obtenu, en particulier, pour l'onde diffractée par un petit disque. Si $D_\varepsilon(z)$ désigne le disque de centre z , et de rayon $\varepsilon > 0$ petit, si l'on éclaire ce disque par une onde plane de grande fréquence et d'angle d'incidence η , alors l'onde diffractée en x , par approximation de l'optique géométrique, puis méthode de la phase stationnaire, est de la forme :

$$u_{\text{dif}}[D_\varepsilon(z)](\eta, x) = F_\varepsilon(\theta, |x - z|) e^{ik_0(|x-z| - 2\varepsilon \sin(\theta(x)/2) + \eta \cdot z)},$$

où $\theta(x)$ est l'angle $\left(\eta, \widehat{\frac{x-z}{|x-z|}}\right)$ (entre 0 et 2π). La phase de cette onde est ainsi (au facteur multiplicatif k_0 près) :

$$\varphi[D_\varepsilon(z)](\eta, x) = |x - z| - 2\varepsilon \sin(\theta(x)/2) + \eta \cdot z.$$

12.2.3 Démarche

Par approximation haute fréquence, on approche l'amplitude $A_1[D_*]$ en transportant l'amplitude $A_0[D_*]$, avec une certaine phase $\varphi[D_*]$ (inconnue) :

$$\begin{cases} \nabla A \cdot \nabla \varphi[D_*] + \frac{1}{2} A \Delta \varphi[D_*] = 0, \\ A = A_0[D_*], \text{ sur } \Gamma_0. \end{cases}$$

$A_1[D_*]$ est alors la trace de A sur Γ_1 . D'autre part, en transportant $A_0[D_*]$, avec la phase connue $\varphi[D_\varepsilon(z)]$ issue de l'onde diffractée par un disque $D_\varepsilon(z)$:

$$\begin{cases} \nabla A \cdot \nabla \varphi[D_\varepsilon(z)] + \frac{1}{2} A \Delta \varphi[D_\varepsilon(z)] = 0, \\ A = A_0[D_*], \text{ sur } \Gamma_0, \end{cases}$$

on obtient, sur Γ_1 , une amplitude $A_1[D_\varepsilon(z)]$. La Figure 12.1 résume cette démarche.

On a alors l'intuition que z est un point bien positionné par rapport à l'objet D_* lorsque l'amplitude transportée $A_1[D_\varepsilon(z)]$ est proche de l'amplitude mesurée $A_1[D_*]$. L'idée originale de reconstruction que nous proposons dans la suite consiste à chercher les z qui rendent petite la quantité $\|A_1[D_\varepsilon(z)] - A_1[D_*]\|$. Dans un premier temps, nous obtenons une expression asymptotique de $A_1[D_\varepsilon(z)]$, par la méthode des caractéristiques. Puis un développement asymptotique de $\|A_1[D_\varepsilon(z)] - A_1[D_*]\|$ permet d'identifier une dérivée topologique à rendre très négative pour estimer D_* .

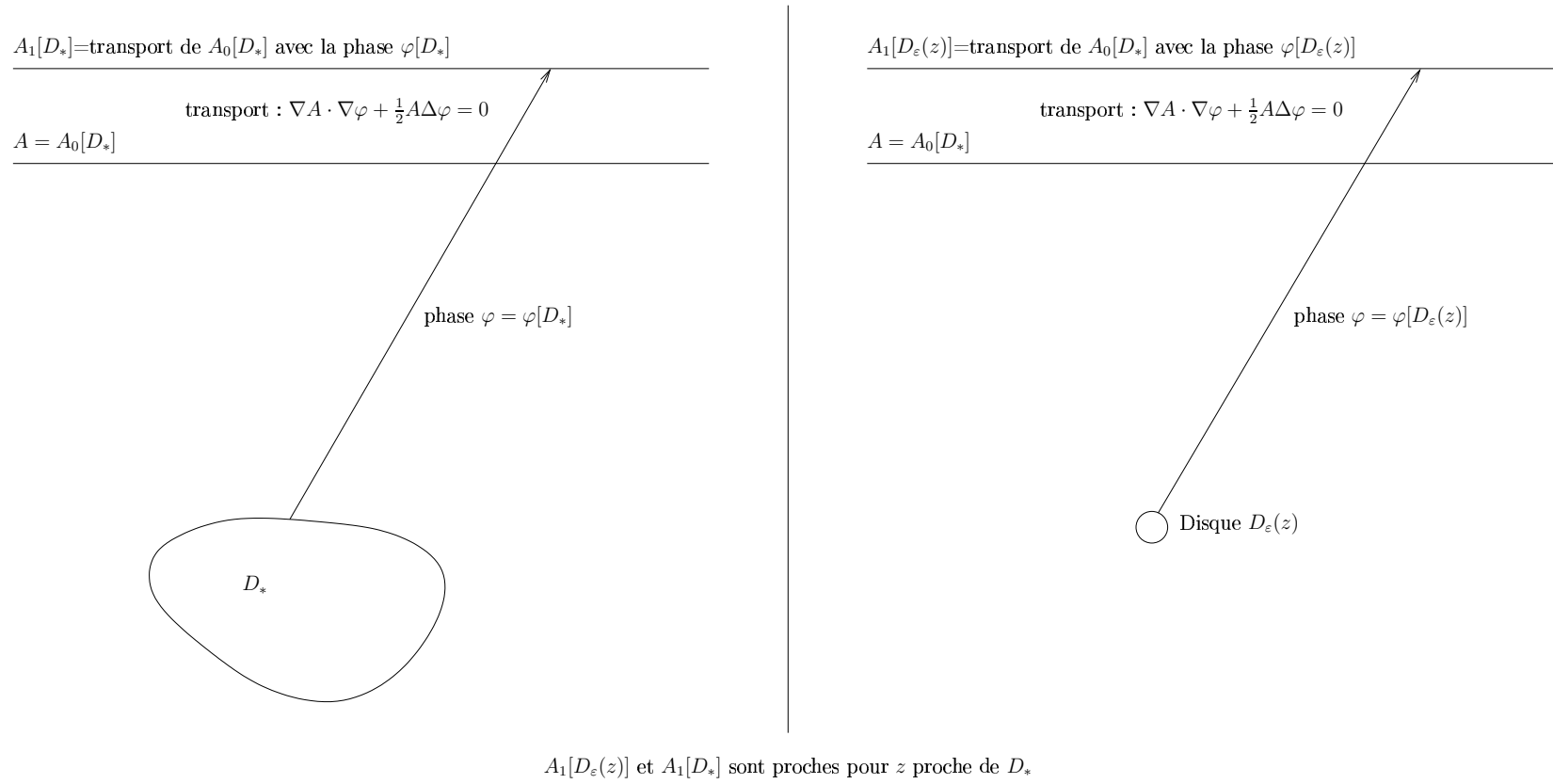


FIG. 12.1: Principe de l'inversion directe par transport de l'amplitude

12.3 Équation de transport

Nous étudions le transport d'une amplitude A_0 avec la phase $\varphi_\varepsilon = \varphi[D_\varepsilon(z)](\eta, \cdot)$, où η est un angle fixé. Plus précisément, soit A satisfaisant l'équation de transport :

$$\begin{cases} \nabla A \cdot \nabla \varphi_\varepsilon + \frac{1}{2} A \Delta \varphi_\varepsilon = 0, \\ A = A_0, \text{ sur } \Gamma_0, \end{cases}$$

avec A_0 une fonction fixée et connue sur Γ_0 . Il s'agit de calculer A sur Γ_1 , ce que nous appelons transporter A de Γ_0 vers Γ_1 . Nous résolvons ce problème par la méthode des caractéristiques, en « transportant » le long de la caractéristique particulière qu'est le rayon de rétropropagation $(0, -\eta)$. La complexité du problème nous amène à mener le calcul asymptotiquement (en ε). Nous obtenons ainsi une expression asymptotique de $A(x_\eta)$, où $x_\eta = \Gamma_1 \cap (0, -\eta)$. Dans l'annexe 12.A, nous détaillons quelques calculs, et nous établissons un développement asymptotique de A le long de chaque courbe caractéristique. Les résultats qui suivent peuvent donc être établis directement, ou considérés comme des cas particuliers de l'annexe.

Remarque. Quitte à effectuer le changement de coordonnées $\tilde{x} = x - z$, nous supposons $z = 0$ dans les calculs. ■

12.3.1 Courbe caractéristique et rayon de rétropropagation

Le rayon de rétropropagation $(0, -\eta)$ intersecte les droites Γ_0 et Γ_1 respectivement en

$$p_\eta = \frac{\gamma_0}{\eta_2} \eta, \quad x_\eta := \frac{\gamma_1}{\eta_2} \eta.$$

Définition 12.1 (Caractéristique). *On appelle courbe caractéristique (issue de p_η) de l'équation de transport, la courbe $x_\varepsilon \in \mathbb{R}^2$ solution de :*

$$\begin{cases} \dot{x}_\varepsilon(t) = \nabla \varphi_\varepsilon(x_\varepsilon(t)), & |t| < T, \\ x_\varepsilon(0) = p_\eta, \end{cases}$$

avec $T > 0$ suffisamment petit.

Cette courbe caractéristique est en fait contenue dans le rayon de rétropropagation $(0, -\eta)$:

Théorème 12.2. *x_ε est la droite issue de p_η dirigée par $p_\eta / |p_\eta| = -\eta$:*

$$x_\varepsilon(t) = p_\eta + \frac{p_\eta}{|p_\eta|} t = p_\eta - t\eta.$$

PREUVE. — Il suffit de constater que cette expression de x_ε convient ($\nabla \varphi_\varepsilon = \nabla |x|$ sur le rayon $(0, -\eta)$ - cf annexe). □

Définition 12.3. *Le temps de trajet pour aller de p_η à x_η en suivant le rayon $(0, -\eta)$ est*

$$t_\eta = -\frac{\gamma_1 - \gamma_0}{\eta_2},$$

la solution de $x_\eta = x_\varepsilon(t_\eta)$.

12.3.2 Calcul sur le rayon de rétropropagation

Lemme 12.4. *Sur la caractéristique x_ε , on a :*

$$A(x_\varepsilon(t)) = A_0(p_\eta) \exp \int_0^t -\frac{1}{2} \Delta \varphi_\varepsilon(x_\varepsilon(s)) ds.$$

Le transport de A de Γ_0 vers Γ_1 , dans la direction de rétropropagation est alors donné par le théorème suivant.

Théorème 12.5. *On a le développement asymptotique :*

$$A(x_\eta) = A_0(p_\eta) \left(\frac{\gamma_0}{\gamma_1} \right)^{1/2} \left(1 - \varepsilon \frac{t_\eta}{4|x_\eta||p_\eta|} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

PREUVE. — Il suffit de prendre $t = t_\eta$ et de faire un développement limité de l'exponentielle dans le lemme précédent. \square

12.4 Méthode de dérivée topologique

12.4.1 Dérivée topologique

En revenant aux notations du problème initial (avec z quelconque), la section précédente conduit au théorème suivant. Il exprime de façon asymptotique la valeur de l'amplitude A au point x_η de Γ_1 en fonction de l'amplitude A_0 au point p_η de Γ_0 .

Théorème 12.6. *Pour tout $p \in \Gamma_0$, en posant $\eta = \frac{z-p}{|z-p|}$ l'angle d'éclairage, le transport de la mesure $A_0[D_*](p)$ vers Γ_1 , le long de la direction de rétropropagation (z, η) , avec phase $\varphi[\varepsilon, z](\eta, \cdot)$, conduit à l'amplitude :*

$$A_1[D_\varepsilon(z)](x_\eta) = A_0[D_*](p) \left(\frac{\gamma_0 - z_2}{\gamma_1 - z_2} \right)^{1/2} \left(1 - \varepsilon \frac{t_\eta}{4|x_\eta - z||p_\eta - z|} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

où $x_\eta = z + \frac{\gamma_1 - z_2}{\eta_2} \eta = \Gamma_1 \cap (z, \eta)$, et $t_\eta = -\frac{\gamma_1 - \gamma_0}{\eta_2}$ est le temps de trajet.

Paramétrons par $x = (x_1, \gamma_1) : \eta(x) = \frac{z-x}{|z-x|}$, $p(x) = z + \frac{\gamma_0 - z_2}{\gamma_1 - z_2}(x - z)$, et posons

$$a_0(x, z) := A_0[D_*](p(x)) \left(\frac{\gamma_0 - z_2}{\gamma_1 - z_2} \right)^{1/2}, \quad a_1(x, z) := -\frac{1}{4}a_0(x, z) \frac{\gamma_1 - \gamma_0}{\gamma_0 - z_2} \frac{1}{|x - z|}.$$

Pour un domaine D , notons $A_1[D]$ l'amplitude issue du transport de $A_0[D_*]$ sur Γ_1 , dans la direction de rétropropagation, avec la phase $\varphi[D]$ de l'onde diffractée par D .

Théorème 12.7 (Dérivée topologique). *La dérivée topologique de l'application $D \mapsto \|A_1[D] - A_1[D_*]\|$, évaluée en z , dans la direction le disque unité, est :*

$$d(z) = \frac{1}{\|a_0(\cdot, z) - A_1[D_*]\|} \langle a_0(\cdot, z) - A_1[D_*], a_1(\cdot, z) \rangle.$$

PREUVE. — Le théorème précédent affirme :

$$A_1[D_\varepsilon(z)](x) = a_0(x, z) + \varepsilon a_1(x, z) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

d'où le résultat en composant par $\|\cdot - A_1[D_*]\|_{L^2(\Gamma_1)}$. \square

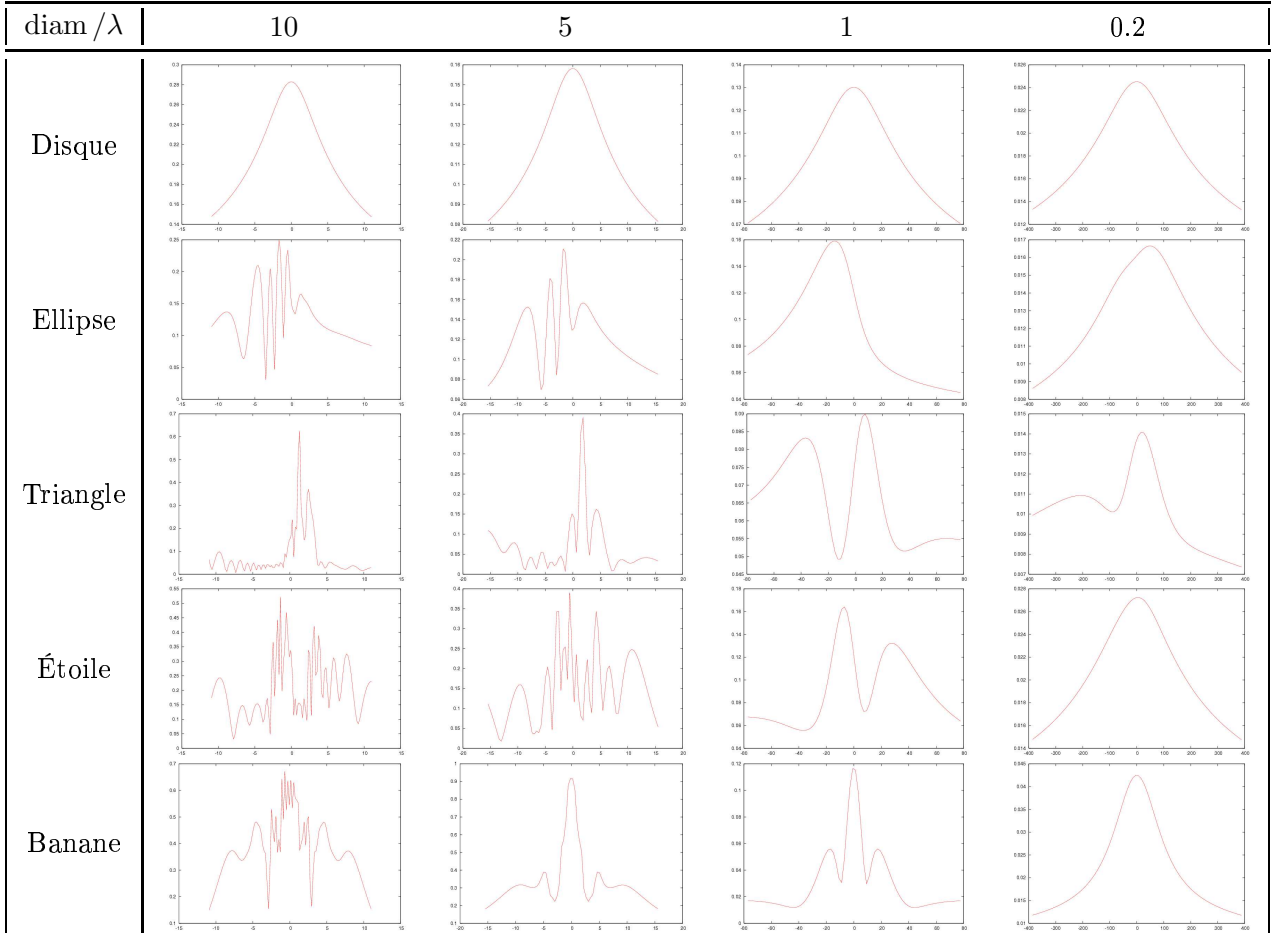
12.4.2 Méthode d'inversion directe

Si le petit disque $D_\varepsilon(z)$ est bien placé, *i.e.* « près » de D_* alors la phase $\varphi[D_\varepsilon(z)]$ approche la phase $\varphi[D_*]$, et donc $A_1[D_\varepsilon(z)]$ approche $A_1[D_*]$. L'approche originale que nous proposons pour reconstruire la forme D_* consiste alors à minimiser $D \mapsto \|A_1[D] - A_1[D_*]\|$, parmi les petits disques. Le développement asymptotique

$$\|A_1[D_\varepsilon(z)] - A_1[D_*]\| = \|a_0(\cdot, z) - A_1[D_*]\| + \varepsilon d(z) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

que nous avons justifié dans le théorème, suggère que $\|A_1[D_\varepsilon(z)] - A_1[D_*]\|$ est petit lorsque $\varepsilon d(z)$ est négatif et le plus grand possible en valeur absolue ; ceci se traduit par une dérivée topologique $d(z)$ négative et très grande en valeur absolue.

Pour estimer D_* , on trace ainsi les lignes de niveau de $z \mapsto d(z)$, puis on en choisit une de niveau d_0 arbitraire. On espère approcher ainsi D_* par $\{z : d(z) < d_0\}$. Le choix de d_0 est délicat et conditionne le résultat obtenu. Il paraît intéressant de le choisir sous la forme $d_0 = \alpha \min d$, où α est un seuil à fixer.



TAB. 12.1: Profils d'amplitude mesurée (puis interpolée), pour différents ordres de grandeur du rapport taille sur longueur d'onde, pour différentes géométries.

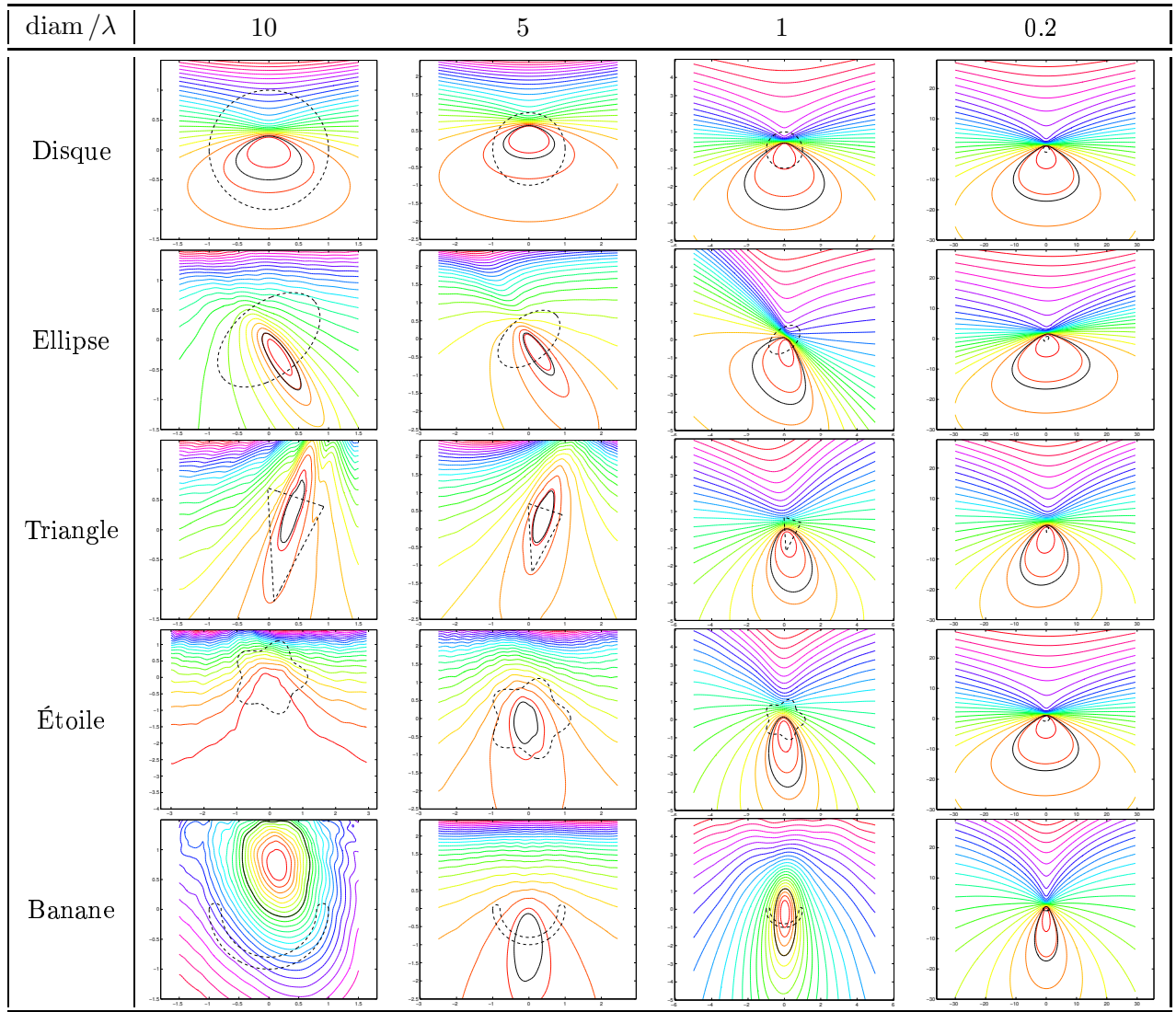
12.5 Illustration numérique

Nous allons illustrer numériquement les résultats que l'on obtient avec notre méthode de dérivée topologique. Nous l'avons appliquée à différentes géométries d'inclusion à reconstruire, pour différents ordres de grandeur de longueur d'onde. Les géométries que l'on teste sont les suivantes : un disque, une ellipse, un triangle, une étoile, une banane. Pour chaque anomalie fixée, on fait varier la pulsation, ce qui permet de constater l'impact du rapport taille de l'anomalie sur longueur d'onde. Nous testons des valeurs de ce rapport de l'ordre de 10, 5, 1, et 0.2.

Dans le milieu de fond, la permittivité est $\varepsilon_0 = 1$, la perméabilité est $\mu_0 = 1$. La forme D_* a un diamètre de l'ordre de 2 ; sa permittivité est $\varepsilon_* = 1.3$, sa perméabilité est $\mu_* = 1$. Pour la résolution du problème direct, on utilise un code des équations intégrales que nous avons développé de façon analogue à celui de la première partie. D_* est discrétisée à raison d'une vingtaine de points par longueur d'onde.

On mesure l'amplitude de l'onde rétrodiffusée sur deux droites parallèles en champ lointain, à une dizaine de longueurs d'onde de l'inclusion. L'écart entre les droites est de l'ordre de deux longueurs d'onde. Les mesures sont prises entre les angles limites 0.3 et 2.84 ; la distribution est uniforme (en l'abscisse) pour la droite Γ_0 ; elle est uniforme en l'angle pour la droite test Γ_1 . Le nombre de points est de l'ordre de 100 sur chaque droite, soit environ une mesure par longueur d'onde (sur Γ_0). Par interpolation (linéaire) des mesures sur Γ_0 , on obtient un profil d'amplitude. Nous avons représenté les profils que l'on obtient dans le Tableau 12.1.

En appliquant notre méthode de dérivée topologique, on obtient alors le Tableau 12.2. Nous avons représenté, sur chaque graphique, la forme à trouver, les lignes de niveau de la dérivée topologique d , ainsi que la ligne de niveau $d_0 = 0.75 \min d$. À noter que l'anomalie est constante par ligne,



TAB. 12.2: Lignes de niveau de la dérivée topologique, pour différents ordres de grandeur du rapport taille sur longueur d'onde, pour différentes géométries. La forme à reconstruire est en pointillés, les lignes colorées sont les lignes de niveau de d (la couleur fonce lorsque d décroît), la ligne en noire est la ligne de niveau $0.75 \min d$.

et que l'ordre de grandeur de sa taille est constant. Toutefois, la fenêtre change pour un affichage convenable des lignes de niveau.

Pour résumer, on remarque que les lignes de niveau intéressantes délimitent des « patates » qui contiennent deux informations essentielles : la position et une direction privilégiée. Les lignes sont en effet situées à proximité de l'origine. Bien que cette information ne soit guère utile ici (on a supposé que l'objet est près de l'origine), elle se veut rassurante. D'autre part, les patates sont allongées selon une direction privilégiée. Cette dernière est à rapprocher avec les profils d'amplitude : elle conduit à la zone où l'amplitude est la plus importante (en nombre et hauteurs de pics). Qualitativement, il s'agit de la direction où la partie réfléchie de l'onde est la plus importante, et coïncide alors le mieux en phase avec la phase de l'onde réfléchie par une petite boule. Cette direction est par exemple orthogonale à la zone la plus plate d'un objet convexe allongé comme l'ellipse.

Par ailleurs, pour trouver simplement une estimation de la forme à partir des lignes de niveau, se pose rapidement la question du choix d'une d'entre elles par un seuil. On remarque alors que les patates sont croissantes avec le niveau, ce qui est logique, et qu'elles croissent à une vitesse très variable selon les cas. Ceci rend donc délicat la sélection du niveau. En particulier, sur nos exemples, le niveau $d_0 = 0.75 \min d$ peut conduire à une forme de volume correct par rapport à celui de la forme initiale, ou de volume très différent.

Enfin, on constate que l'algorithme trouve un certain objet convexe, même si l'objet recherché est fortement concave, comme la banane. Par ailleurs, l'objet convexe obtenu ne vit pas dans le même espace que celui recherché ; c'est ainsi que la forme obtenue pour une ellipse n'est pas l'ellipse elle-même (mais plutôt une ellipse avec une orientation différente). Il faut réussir à « inverser » cet objet (ou inverser d), pour obtenir un objet « équivalent » à celui que l'on cherche, et vivant dans le même espace. Vu comment d transforme, par exemple, une ellipse, il paraît raisonnable d'orienter les recherches vers un objet obtenu, d'une certaine manière, par inversion de la courbure des lignes de niveaux de d ; encore faut-il trouver le bon volume...

12.6 Conclusion et perspectives

Nous avons développé une méthode originale de reconstruction directe (non itérative) d'un objet, pour des mesures ne contenant que l'amplitude, avec vue partielle. Cette approche est basée sur une approximation haute fréquence des ondes diffractées par un objet convexe, et plus particulièrement l'équation de transport. Elle tend à minimiser l'écart entre les mesures prises sur une droite, avec le transport des mesures d'une autre droite ; la minimisation porte sur la position d'un petit disque qui donne la phase pour effectuer le transport. Ceci revient à chercher les points qui rendent très négative la dérivée topologique d'un coût. Nous avons donc résolu l'équation de transport, par la méthode des caractéristiques ; puis, nous avons obtenu une expression de la dérivée topologique.

Numériquement, les lignes de niveau de la dérivée contiennent la position de l'objet et une direction privilégiée de réflexion des ondes. Elles ne permettent pas de retrouver facilement le volume de l'objet. Elles sont de forme convexes, et ne retrouvent pas les concavités. La transformation simple et adéquate qui, à partir de la dérivée, retrouve la bonne forme, ou du moins une forme « équivalente » (au sens où cette méthode ne peut pas faire mieux), est une question encore ouverte.

Dans notre étude, pour obtenir les mesures, on vise l'objet avec un laser, ce qui suppose connue sa position. Les résultats de notre méthode directe n'apportent donc pas beaucoup d'informations exploitables ici. En perspectives, on peut toutefois imaginer le cas où l'énergie du système proviendrait de points source indépendants de la position de l'objet (et non plus d'ondes planes qui en dépendent par leur angle d'incidence). Notre méthode, adaptée à ce cas, devrait reconstruire la position.

12.A Transport sur les caractéristiques

12.A.1 Introduction

On souhaite calculer A , solution de l'équation de transport, avec la phase $\varphi_\varepsilon = \varphi[D_\varepsilon(z)](\eta, \cdot)$:

$$\begin{cases} \nabla A \cdot \nabla \varphi_\varepsilon + \frac{1}{2} A \Delta \varphi_\varepsilon = 0, \\ A = A_0, \text{ sur } \Gamma_0, \end{cases}$$

avec A_0 une fonction fixée sur Γ_0 . Nous présentons ici l'obtention d'un développement asymptotique de A le long d'une courbe caractéristique générale. Celui-ci permet l'obtention d'un développement le long du rayon de rétropropagation, courbe caractéristique particulière.

12.A.2 Préliminaires

Quitte à effectuer le changement de coordonnées $\tilde{x} = x - z$, nous supposons $z = 0$.

Posons $f_0(x) := \nabla |x|$, et $f_1 := -2\nabla \sin(\theta/2)$, de sorte que

$$\nabla \varphi_\varepsilon = f_0 + \varepsilon f_1, \quad \Delta \varphi_\varepsilon = \operatorname{div} f_0 + \varepsilon \operatorname{div} f_1.$$

Les résultats calculatoires suivants sont exploités dans les calculs.

Lemme 12.8. *On a :*

$$f_0(x) = \frac{x}{|x|}, \quad Df_0(x) = \frac{1}{|x|^3} \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} (x_2 \quad -x_1), \quad f_1 = \frac{1}{2 \sin(\theta/2)} Df_0 \eta,$$

$$\operatorname{div} f_0(x) = \frac{1}{|x|}, \quad \operatorname{div} f_1(x) = \frac{|f_1(x)|^2}{2 \sin(\theta(x)/2)} - \frac{x \cdot \eta}{2 \sin(\theta(x)/2) |x|^3}, \quad \nabla \operatorname{div} f_0(x) = -\frac{x}{|x|^3}.$$

PREUVE. — Il ne s'agit que de quelques calculs différentiels. Pour f_1 , il est judicieux de remarquer au préalable :

$$1 - 2 \sin^2(\theta(x)/2) = \frac{x - z}{|x - z|} \cdot \eta.$$

□

12.A.3 Méthode des caractéristiques

Définition 12.9 (Caractéristique). *Pour $p \in \Gamma_0$, on appelle courbe caractéristique (issue de p) de l'équation de transport, la courbe $x_\varepsilon(p, \cdot) \in \mathbb{R}^2$ solution de :*

$$\begin{cases} \dot{x}_\varepsilon(p, t) = \nabla \varphi_\varepsilon(x_\varepsilon(p, t)), & |t| < T, \\ x_\varepsilon(p, 0) = p \in \Gamma_0, \end{cases}$$

avec $T > 0$ suffisamment petit. Pour p fixé on note aussi par abus $x_\varepsilon(t)$.

Lemme 12.10. *Sur la caractéristique x_ε , on a :*

$$A(x_\varepsilon(t)) = A_0(p) \exp \int_0^t -\frac{1}{2} \Delta \varphi_\varepsilon(x_\varepsilon(s)) ds.$$

PREUVE. — $a(t) := A(x_\varepsilon(t))$ satisfait :

$$\begin{cases} \dot{a} + \frac{1}{2} a(t) \Delta \varphi_\varepsilon(x_\varepsilon(t)) = 0, & |t| < T, \\ a(0) = A_0(p), \end{cases}$$

d'où c.q.f.d. en intégrant cette EDO. □

La suite de notre travail consiste essentiellement à obtenir $A(x_\varepsilon(t))$, à l'aide d'un développement asymptotique de $x_\varepsilon(t)$.

12.A.4 Développement asymptotique de la caractéristique

L'équation différentielle ordinaire sur x_ε n'étant pas simple à résoudre, nous allons donner un développement asymptotique de x_ε .

Lemme 12.11. *La solution $x_0 = (x_0^{(1)}, x_0^{(2)})$ de*

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = f_0(x_0), \\ x_0(0) = p. \end{cases}$$

est la droite issue de p dirigée par $p/|p|$:

$$x_0(t) = p + \frac{p}{|p|} t.$$

PREUVE. — Le rapport des deux composantes de l'EDO permet de donner

$$\frac{dx_0^{(1)}}{x_0^{(1)}} = \frac{dx_0^{(2)}}{x_0^{(2)}}$$

et donc $x_0^{(1)} = C x_0^{(2)}$ avec C une constante. En injectant ceci dans la première composante de l'EDO, alors on obtient :

$$x_0(t) = \begin{pmatrix} \beta C t + K \\ \beta t + K/C \end{pmatrix},$$

où K est une constante, et $\beta := \frac{1}{\sqrt{C^2+1}}$. Les constantes C et K sont déterminées par la condition initiale $x_0(0) = p$, et donc $K = p_1$, et $C = p_1/p_2$, puis $\beta = \frac{p_2}{|p|}$. D'où c.q.f.d. □

Introduisons r_ε tel que $x_\varepsilon =: x_0 + \varepsilon r_\varepsilon$. On a $r_\varepsilon(0) = 0$. Par ailleurs, l'EDO $\dot{x}_\varepsilon = \nabla \varphi_\varepsilon(x_\varepsilon)$ s'écrit :

$$\dot{x}_0 + \varepsilon \dot{r}_\varepsilon = f_0(x_0 + \varepsilon r_\varepsilon) + \varepsilon f_1(x_0 + \varepsilon r_\varepsilon),$$

donc par développement limité :

$$\dot{r}_\varepsilon = Df_0(x_0)r_\varepsilon + f_1(x_0) + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Pour corriger à l'ordre supérieur l'erreur comise dans l'EDO en approchant x_ε par x_0 , on définit alors x_1 comme dans le lemme suivant.

Lemme 12.12. *Soit x_1 la solution de*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = Px_1 + q, \\ x_1(0) = 0, \end{cases}$$

où

$$P(t) := Df_0(x_0(t)) = Q \begin{pmatrix} \frac{1}{|x_0(t)|} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^T, \quad q := f_1(x_0) = \frac{1}{2 \sin(\theta_0/2)} P \eta,$$

$$Q := \frac{1}{|p|} \begin{pmatrix} p_2 & p_1 \\ -p_1 & p_2 \end{pmatrix}, \quad \theta_0 := \theta(x_0) = \left(\widehat{\frac{p}{|p|}}, \eta \right), \quad |x_0(t)| = |p| + t.$$

Alors x_1 est la droite :

$$x_1(t) = \frac{t}{2 \sin(\theta_0/2)} Df_0(p) \eta = t f_1(p).$$

PREUVE. — Il est bien connu que l'EDO possède pour solution :

$$x_1(t) = \int_0^t e^{\int_s^t P} q(s) ds.$$

Par des calculs classiques, on montre :

$$\int_s^t P = Q \begin{pmatrix} \log \frac{|p|+t}{|p|+s} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^T, \quad e^{\int_s^t P} = Q \begin{pmatrix} \frac{|p|+t}{|p|+s} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Q^T,$$

$$\int_0^t e^{\int_s^t P} q(s) ds = \frac{|p|+t}{2 \sin(\theta_0/2)} Q \int_0^t \begin{pmatrix} \frac{1}{(|p|+s)^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ds Q^T \eta,$$

d'où c.q.f.d. □

Par définition même de (x_0, x_1) , on obtient, au moins formellement, le théorème suivant.

Théorème 12.13. x_ε a le développement asymptotique :

$$x_\varepsilon = x_0 + \varepsilon x_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

avec

$$x_0(t) = p + \frac{p}{|p|} t, \quad x_1(t) = t f_1(p).$$

12.A.5 Calcul le long d'une caractéristique

Théorème 12.14. *Sur la caractéristique x_ε , A est de la forme :*

$$A(x_\varepsilon(t)) = A(p) \left(\frac{|p|}{|p|+t} \right)^{1/2} \left[1 + \varepsilon \left(C_{\eta,p} \log(|p|+t) + \sum_{0 \leq i,j \leq 2} C_{\eta,p}^{i,j} \frac{t^i}{(|p|+t)^j} \right) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

où $C_{\eta,p}$ et $C_{\eta,p}^{i,j}$ sont des constantes en t obtenues dans la preuve.

PREUVE. — Comme

$$\Delta\varphi_\varepsilon(x_\varepsilon) = \operatorname{div} f_0(x_0) + \varepsilon (\nabla \operatorname{div} f_0(x_0) \cdot x_1 + \operatorname{div} f_1(x_0)) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

alors par Lemme 12.10 :

$$A(x_\varepsilon(t)) = A(p) \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^t \operatorname{div} f_0(x_0) \right) \left[1 - \frac{\varepsilon}{2} \int_0^t (\nabla \operatorname{div} f_0(x_0) \cdot x_1 + \operatorname{div} f_1(x_0)) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Premièrement,

$$\int_0^t \operatorname{div} f_0(x_0) = \log \frac{|x_0(t)|}{|p|}.$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^t (\nabla \operatorname{div} f_0(x_0) \cdot x_1 + \operatorname{div} f_1(x_0)) \\ = -\frac{1}{2} p \cdot \eta \int_0^t \frac{1}{|x_0(s)|^3} ds - \left(p \cdot f_1(p) + \frac{1}{2} \frac{p}{|p|} \cdot \eta \right) \int_0^t \frac{s}{|x_0(s)|^3} ds \\ - \frac{p}{|p|} \cdot f_1(p) \int_0^t \frac{s^2}{|x_0(s)|^3} ds \\ + \frac{1}{(2 \sin(\theta_0/2))^3} \eta^T Q \int_0^t \begin{pmatrix} \frac{1}{(|p|+s)^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ds Q^T \eta, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{1}{|x_0(s)|^3} ds &= -\frac{1}{2} \frac{1}{|x_0(t)|^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{|p|^2}, \\ \int_0^t \frac{s}{|x_0(s)|^3} ds &= -\frac{1}{2} \frac{t}{|x_0(t)|^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{|x_0(t)|} + \frac{1}{2} \frac{1}{|p|}, \\ \int_0^t \frac{s^2}{|x_0(s)|^3} ds &= -\frac{1}{2} \frac{t^2}{|x_0(t)|^2} - \frac{t}{|x_0(t)|} + \log \frac{|x_0(t)|}{|p|}, \\ \frac{1}{2 \sin(\theta_0/2)} \eta^T Q \int_0^t \begin{pmatrix} \frac{1}{(|p|+s)^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ds Q^T \eta &= \frac{t}{|x_0(t)|} \eta \cdot f_1(p). \end{aligned}$$

D'où c.q.f.d. □

Un corollaire du théorème est le transport de A de Γ_0 vers Γ_1 , dans la direction de rétropropagation.

Corollaire 12.15. *On a :*

$$A(x_\eta) = A_0(p_\eta) \left(\frac{\gamma_0}{\gamma_1} \right)^{1/2} \left(1 - \varepsilon \frac{t_\eta}{4 |x_\eta| |p_\eta|} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

PREUVE. — On remarque que pour $(p, x, t) = (p_\eta, x_\eta, t_\eta)$, $x = x_\varepsilon(p, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, et donc $A(x) = A(x_\varepsilon(p, t)) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Il suffit alors d'appliquer le Théorème 12.14 et de simplifier l'expression. □

Méthode d'inversion itérative

13.1 Introduction

Nous souhaitons développer une méthode itérative de reconstruction, par minimisation d'une fonctionnelle. Ce type de méthode, inspirée de l'optimisation de forme, présente l'avantage d'être très général, de pouvoir s'appliquer à n'importe quel problème inverse, et de pouvoir fournir un résultat précis. Il présente l'inconvénient de ne pas être adapté spécifiquement au problème étudié, et est coûteux en temps de calcul.

Une telle méthode, itérative, nécessite un état initial, et consiste ensuite à construire une suite de formes qui permet la décroissance du coût, et donc la convergence vers un minimum. La non-convexité de la fonctionnelle implique la convergence vers un minimum qui n'est peut-être que local. L'état initial doit donc être le plus précis possible, si l'on veut espérer avoir une reconstruction convenable. Les méthodes d'inversion directe constituent en général un bon outil pour le déterminer.

Une méthode classiquement employée pour résoudre un tel problème d'optimisation est la méthode de descente de gradient [5]. Il s'agit d'une méthode d'évolution du contours, le long de la ligne de plus grande pente du coût : son gradient.

Pour mener une étude comparative, nous considérons deux problèmes inverses : l'un où les mesures contiennent l'amplitude et la phase, l'autre où seule l'amplitude est mesurée. Nous explicitons, dans chaque cas, le calcul du gradient de la fonctionnelle, et nous appliquons alors la méthode de descente de gradient. Pour conclure, nous exposons quelques résultats numériques. Ainsi, nous effectuons des tests de résolution, de stabilité, et nous illustrons la dépendance de la solution par rapport à divers paramètres : contraste, état initial, choix du pas de descente, connaissance ou non de la phase.

13.2 Optimisation de forme

13.2.1 Introduction

Nous souhaitons résoudre l'équation $M[D](x) = M[D_*](x)$, $x \in \Gamma$, où Γ est un ensemble de points de mesures, soit tout autour d'un disque ce qui permet d'avoir une vue totale de D_* , soit sur un segment de droite ce qui conduit à une vue seulement partielle; $M[D]$ désigne soit les mesures d'amplitude de l'onde rétrodiffusée : $M[D](x) = A[D](x) := |u_{\text{dif}}[D](-x/|x|, x)|$, soit l'onde rétrodiffusée elle-même : $M[D](x) = B[D](x) := u_{\text{dif}}[D](-x/|x|, x)$.

Nous reformulons le problème inverse comme un problème d'optimisation de forme :

$$\inf_D J_M[D], \quad \text{avec } J_M[D] := \frac{1}{2} \|M[D] - M[D_*]\|_{L^2(\Gamma)}^2.$$

Remarque. Ici, la notation suppose implicitement que Γ est munie d'une mesure (au sens mathématique du terme). En pratique, il s'agit d'une combinaison finie de masses de Dirac $\sum_{i=1}^N \delta_{x_i}$, où les x_i sont N points de mesure (au sens physique du terme), et alors $\langle f, g \rangle_{L^2(\Gamma)} = \sum_i f(x_i)g(x_i)$. ■

Dans un premier temps, nous calculons le gradient des fonctionnelles, à partir du gradient de l'onde diffractée qui est connu [8]. Ceci permet alors de développer une méthode de type descente de gradient.

13.2.2 Calculs des gradients

Pour résumer, les gradients des fonctionnelles peuvent s'obtenir simplement, par dérivation composée, la dérivée de l'onde diffractée étant un résultat connu.

La fonction de Green du problème avec anomalie D , en un point source y est notée $G[D](\cdot, y)$:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu_*} \mathbb{1}_D + \frac{1}{\mu_0} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}} \right) \nabla G[D](\cdot, y) + \omega^2 (\varepsilon_* \mathbb{1}_D + \varepsilon_0 \mathbb{1}_{\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}}) G[D](\cdot, y) = -\delta_y,$$

avec une condition de radiation sortante appropriée.

Remarque. Pour $y \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$, $G[D](\cdot, y)$ peut se décomposer sous une formulation intégrale analogue à $u[D](\eta, \cdot)$. La seule nuance est le terme provenant de la solution du problème de fond. Il suffit ainsi de remplacer u_{inc} par $-\mu_0 G_{k_0}(\cdot, y)$, y compris dans le système d'équations intégrales. Ceci permet là encore de calculer numériquement $G[D]$. ■

La dérivée de forme de l'onde diffractée est donnée dans le lemme suivant.

Lemme 13.1. *La dérivée de forme de $u_{\text{dif}}[D](\eta, x)$, évaluée dans la direction h , est :*

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial D} u_{\text{dif}}[D](\eta, x), h \right\rangle = \int_{\partial D} h(z) [M_D(z) \nabla u[D](\eta, z) \cdot \nabla_z G[D](x, z) + \omega^2 (\varepsilon_* - \varepsilon_0) \mu_0 u[D](\eta, z) G[D](x, z)] d\sigma(z),$$

où

$$M_D(x) := \left(\frac{\mu_0}{\mu_*} - 1 \right) \left(\frac{\mu_0}{\mu_*} \nu_D(x) \otimes \nu_D(x) + \tau_D(x) \otimes \tau_D(x) \right), \quad x \in \partial D.$$

Ici, $\nu_D(x)$ est la normale unitaire extérieure à ∂D en x , et $\tau_D(x) := \mathcal{R}_{\pi/2} \nu_D(x)$ est un vecteur unitaire tangentiel à ∂D en x .

PREUVE. — Il s'agit d'un résultat de [8], obtenu en citant [17] : si D_h est une petite variation de D , au sens $\partial D_h = (I + h\nu_D)(\partial D)$, avec $h \in \mathcal{C}^1(\partial D)$ de norme petite, alors

$$u_{\text{dif}}[D_h](\eta, x) = u_{\text{dif}}[D](\eta, x) + \int_{\partial D} h(z) [M_D(z) \nabla u[D](\eta, z) \cdot \nabla_z G[D](x, z) + \omega^2 (\varepsilon_* - \varepsilon_0) \mu_0 u[D](\eta, z) G[D](x, z)] d\sigma(z) + o(\|h\|),$$

avec x loin de D , $\omega = o(\|h\|^{-1})$. □

On notera

$$b[D](x)(z) := M_D(z) \nabla u[D](-x/|x|, z) \cdot \nabla_z G[D](-x/|x|, z) + \omega^2 (\varepsilon_* - \varepsilon_0) \mu_0 u[D](-x/|x|, z) G[D](x, z)$$

le gradient (de forme) de l'onde rétrodiffusée.

Lemme 13.2. *On a les résultats de dérivation élémentaires suivants.*

- (i) *Module complexe :* $\left\langle \frac{d}{dz}(|z| - |z_0|), h \right\rangle = \Re \bar{z} h$;
- (ii) *Carré de la norme L^2 :* $\left\langle \frac{d}{df} \frac{1}{2} \|f\|_{L^2}^2, h \right\rangle = \Re \langle f, h \rangle_{L^2}$.

La dérivée de forme des fonctionnelles J_A et J_B s'obtient alors par dérivation composée.

Théorème 13.3. *La dérivée de forme de J_B , évaluée dans la direction h , est :*

$$\langle J'_B[D], h \rangle = \int_{\partial D} h \langle B[D] - B[D_*], b[D] \rangle_{L^2(\Gamma)} d\sigma.$$

On peut ainsi identifier $J'_B[D]$ à $\nabla J_B[D] := \Re \langle B[D] - B[D_*], b[D] \rangle_{L^2(\Gamma)}$, dans $L^2(\partial D)$.

PREUVE. — J_B est la composée de $D \mapsto u_{\text{dif}}[D] - B[D_*]$ par $f \mapsto \frac{1}{2} \|f\|_{L^2}^2$, donc par composition des dérivées :

$$\langle J'_B[D], h \rangle = \Re \left\langle B[D] - B[D_*], \langle b[D], h \rangle_{L^2(\partial D)} \right\rangle_{L^2(\Gamma)},$$

d'où c.q.f.d. en échangeant l'ordre de sommation. \square

Théorème 13.4. *La dérivée de forme de J_A , évaluée dans la direction h , est :*

$$\langle J'_A[D], h \rangle = \int_{\partial D} h \left\langle A[D] - A[D_*], \Re \overline{u_{\text{dif}}[D]} b[D] \right\rangle_{L^2(\Gamma)} d\sigma.$$

On peut ainsi identifier $J'_A[D]$ à $\nabla J_A[D] := \left\langle A[D] - A[D_*], \Re \overline{u_{\text{dif}}[D]} b[D] \right\rangle_{L^2(\Gamma)}$, dans $L^2(\partial D)$.

PREUVE. — J_A est la composée de $D \mapsto u_{\text{dif}}[D]$ par $z \mapsto |z| - A[D_*]$, puis par $f \mapsto \frac{1}{2} \|f\|_{L^2}^2$. Par composition des dérivées, on obtient alors :

$$\langle J'_A[D], h \rangle = \left\langle A[D] - A[D_*], \Re \overline{u_{\text{dif}}[D]} \langle b[D], h \rangle_{L^2(\partial D)} \right\rangle_{L^2(\Gamma)},$$

d'où c.q.f.d. en échangeant l'ordre de sommation. \square

13.2.3 Algorithme de descente de gradient

La méthode de descente de gradient est un algorithme classique de minimisation. Elle construit itérativement une suite qui fait décroître le coût, en partant d'un état initial donné.

Le développement asymptotique

$$J[D_{\delta h_D}] = J[D] + \delta \langle J'[D], h_D \rangle + \mathcal{O}(\delta),$$

suggère que pour un pas $\delta > 0$ suffisamment petit, la diminution de J est assurée si on fait évoluer D dans une direction h_D telle que $\langle J'[D], h_D \rangle \leq 0$. h_D est alors appelée direction de descente. La descente de gradient est obtenue en choisissant la direction de descente de plus grande pente : $h_D = -J'[D]$.

Algorithme 13.1 Descente de gradient

- Entrée : estimation D_0 de D_* , tolérance $\eta > 0$, nombre maximum d'itérations n , pas $\delta > 0$.
- Itération $1 \leq k+1 \leq n$: $h_k := -\frac{J'[D_k]}{\|J'[D_k]\|_\infty}$, puis $\partial D_{k+1} := (I + \delta h_k \nu_k)(\partial D_k)$.
- Critère d'arrêt : erreur relative $\frac{J[D_k] - J[D_{k+1}]}{J[D_k]} < \eta$ ou $k = n$.

Remarque. À l'étape $k+1$, si le coût augmente, alors on diminue δ : $\delta := \delta/10$, puis on recommence l'itération ; sinon on augmente δ : $\delta := 1.3\delta$, puis on passe à l'itération suivante. Ceci permet d'assurer la décroissance de $J[D_k]$, et augmente la vitesse de convergence. \blacksquare

L'algorithme 13.1 de descente de gradient permet finalement la résolution, du moins locale, du problème d'optimisation, et donc du problème inverse.

13.3 Résultats numériques

13.3.1 Introduction

Nous avons présenté une méthode d'inversion par decente de gradient. Nous avons écrit un code qui permet d'en tester la validité sur différents exemples, et de mettre en évidence certaines propriétés. Comme nous l'avons annoncé, nous traitons le cas de mesures phase-amplitude et amplitude seule. Par ailleurs, nous faisons des tests avec vue partielle et avec vue totale. Ceci permet de constater l'impact du facteur phase, et du facteur limitation de vue.

Tout d'abord, nous précisons les paramètres de résolution fixés pour l'étude. Ensuite, nous soulignons l'importance de l'état initial D_0 , en résolvant le même problème avec différentes initialisations. D'autre part, nous examinons une autre stratégie de choix de pas de decente. Puis, nous testons la résolution en changeant la forme D_* à détecter. Nous résolvons un problème en faisant varier le contraste. Enfin, nous illustrons la stabilité par l'ajout de bruits de plus en plus importants.

Les résultats sont présentés dans des tableaux. Les deux premières colonnes sont obtenues avec mesures phase-amplitude, les deux dernières avec amplitude seule. La première et la troisième colonne sont obtenues avec vue totale, la deuxième et la quatrième avec vue partielle. Le passage d'une ligne à une autre se fait par variation d'un paramètre que l'on teste. En trait léger plein, on représente l'anomalie à retrouver. En trait plein épais, on représente notre reconstruction. Enfin, en pointillés, on représente l'état initial que l'on se donne.

13.3.2 Paramètres de résolution fixés

Concernant tout d'abord la résolution des problèmes directs, nous utilisons notre code des équations intégrales. Il permet ainsi de simuler les mesures, pour une anomalie D_* que l'on cherchera à reconstruire, et pour l'estimation D_k de D_* obtenue au fil des itérations. Pour la discrétisation des problèmes, on approche ∂D_* par un polygone de côtés de l'ordre de $\lambda/30$, et ∂D_k par un polygone de côtés de l'ordre de $\lambda/25$. Ceci permet d'avoir une solution assez précise.

Concernant l'évolution des contours, on discrétise ∂D_k par polygone de côtés de l'ordre de $\lambda/6$. Il est en effet coûteux, inutile, voire instable, de déplacer trop de points. ∂D_{k+1} est le polygone résultant de l'évolution des sommets de ∂D_k ainsi discrétisé, par application de la direction de descente (opposé du gradient). Enfin, nous avons pris une tolérance de $\eta = 2\%$, un nombre maximum d'itérations de $n = 50$, et un pas (initial) de $\delta = 1$.

Les mesures sont toujours prises sur un champ lointain. Pour le cas où la vue est totale, les mesures sont uniformément distribuées sur le cercle de centre 0 et de rayon 8λ . Lorsque la vue est partielle, elles sont uniformément distribuées sur la portion de droite $\{x_2 = 8\lambda, 0.15\pi \leq \frac{x}{|x|} \leq 0.85\pi\}$. Concernant le nombre N de mesures, on le prend du même ordre que le nombre de sommets de D_k situés dans la zone éclairée. Trop peu de mesures conduisent à des instabilités numériques, trop de mesures alourdissent les calculs sans apporter de précision supplémentaire. Enfin, les tests sont faits pour un objet étendu, de taille supérieure à la demi-longueur d'onde.

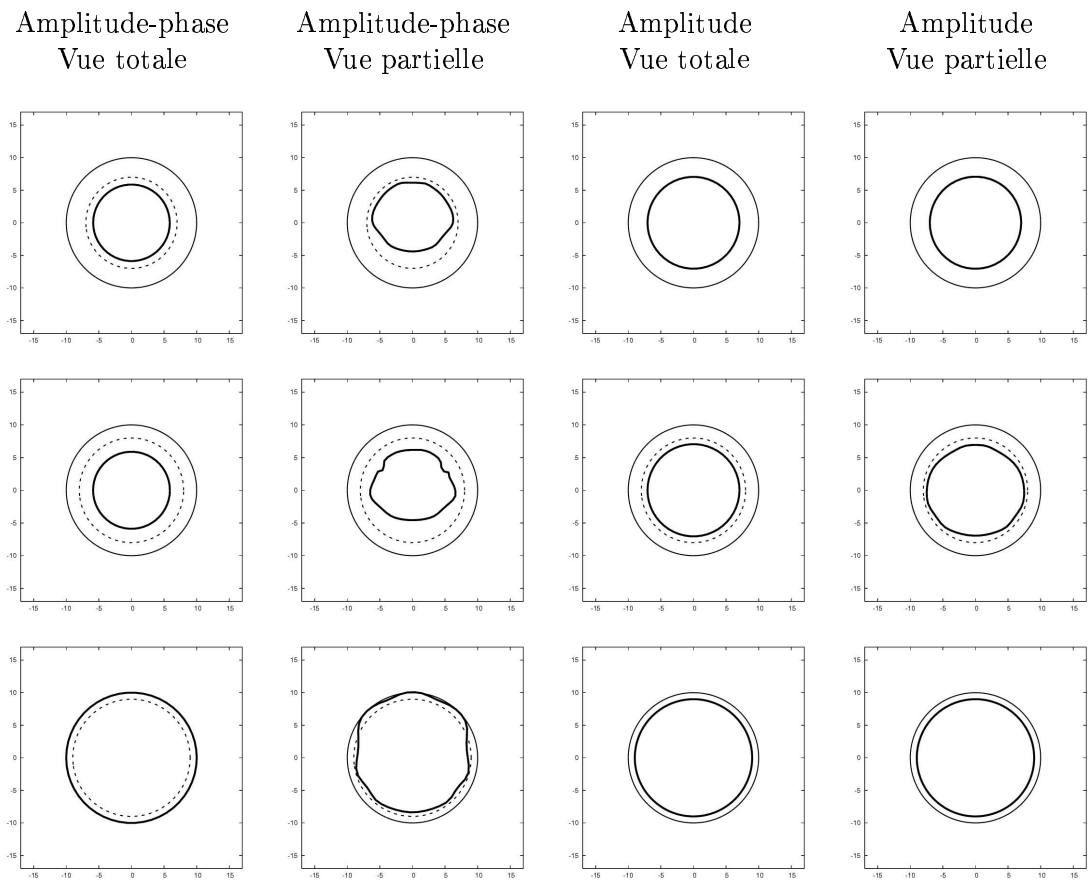
13.3.3 Initialisation

Nous illustrons le rôle capital de l'initialisation D_0 , en changeant sa taille et sa position. Ici, D_* est le disque de centre 0 et de rayon 10 ; $\varepsilon_* = 1.3$, $\mu_* = 0.1$. D_0 est un disque dont nous allons faire varier le rayon et le centre.

Pour les tests de la taille, on fixe $\omega = 0.8$. D_0 est le disque de centre 0 et de rayon $r_0 = 7, 8, 9$. Les résultats sont présentés sur la Figure 13.1.

Pour les tests sur la position, $\omega = 0.4$. D_0 est le disque de rayon 10 et de centre $(x_0, 0)$, $x_0 = 1, 3, 6.5$. Les résultats sont présentés sur la Figure 13.2.

On observe alors que la solution dépend fortement de D_0 . Elle est correcte ou non. Dans certains cas, la forme n'a pas évolué. Il est également intéressant de remarquer qu'une même solution, bien que non correcte, peut être atteinte pour des états initiaux différents. En définitive, ces tests révèlent l'importance de l'état initial. Ils mettent en évidence la présence de minima locaux, et le caractère non convexe du problème.

FIG. 13.1: Influence de la taille de l'état initial : solutions en fonction du rayon initial $r_0 = 7, 8, 9$.

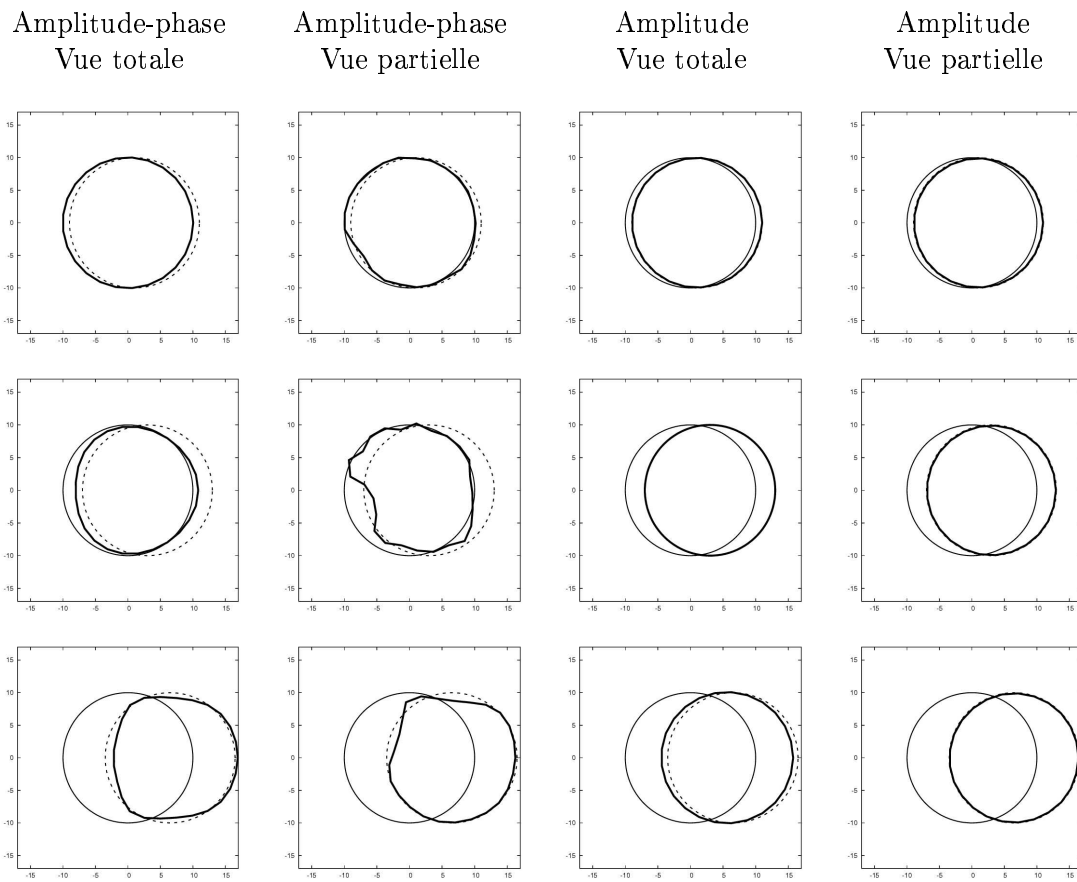


FIG. 13.2: Influence de la position de l'état initial : solutions en fonction de la position $x_0 = 1, 3, 6.5$.

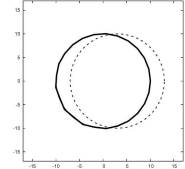
13.3.4 Pas de descente

Pour atteindre le minimum global, la stratégie du choix du pas de descente δ peut également remise en cause. En effet, elle détermine également la reconstruction que l'on obtient. Nous présentons une autre stratégie que la nôtre, avec ses avantages et ses inconvénients.

Comme on sait que le minimum du coût est nul, il peut paraître intéressant de choisir le pas δ qui annule le coût actualisé, ou du moins son approximation affine : $J[D_k] - \delta \|\nabla J[D_k]\|^2 = 0$. Ceci revient en fait à résoudre $J[D] = 0$ par une méthode de type Newton.

Comme, la décroissance du coût n'est plus surveillée, cela autorise à augmenter le coût et par conséquent permet de passer d'un minimum local à un autre. On peut ainsi espérer atteindre le bon minimum, même si l'état initial est près d'un mauvais minimum local.

Ci-contre, nous avons résolu le même exemple que celui de la Figure 13.2, deuxième ligne-première colonne, mais avec le pas qui annule l'approximation affine du coût. La reconstruction est désormais parfaite.



Néanmoins, les propriétés de la méthode ne sont plus satisfaisantes. En général, il ne faut pas espérer pouvoir annuler le coût, et donc en plus que chercher à le faire n'ait pas de sens, l'algorithme n'y parviendra pas et ne convergera pas. Nous préférons donc ne pas employer cette méthode, bien qu'elle puisse dans certains cas être très bonne.

D'autres stratégies pourraient être citées. Hélas, aucune d'entre-elles n'est miraculeuse. En général, le pas est déterminé de façon empirique. Nous conservons notre stratégie, qui a le mérite d'assurer la décroissance du coût et de permettre rapidement la convergence.

13.3.5 Résolution

Pour illustrer la résolution de nos méthodes, nous effectuons des tests sur différentes géométries d'inclusion : différentes étoiles ainsi qu'une banane. Ici, $\varepsilon_* = 1.3$, $\mu_* = 0.1$, et $\omega = 0.4$.

Étoile

D_0 est le disque de centre 0 et de rayon 8.5. D_* est une étoile de rayon principal 10., à $f = 3, 5, 8, 9, 10$ branches d'amplitude $\alpha = 0.1$ (Figure 13.3) ou $\alpha = 0.25$ (Figure 13.4), paramétrée par :

$$\gamma(t) = 10(1 + \alpha \cos(ft)) \begin{pmatrix} \cos(t + 2.5) \\ \sin(t + 2.5) \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

On constate que la reconstruction porte essentiellement sur la partie illuminée de l'objet ; la zone d'ombre dans le cas de la vue partielle est peu ou pas imagée. La suppression de la phase n'empêche pas une reconstruction convenable de la forme. Son ajout donne toutefois une certaine notion de position qui permet de mieux coller la solution à l'objet. La reconstruction perd en qualité lorsque le nombre, ou l'amplitude, des branches augmente. Notons enfin que la zone d'ombre est légèrement mieux imagée lorsque pour des grandes branches.

Banane

D_* est en forme de banane, de rayons caractéristiques 5 et 10 (Figure 13.5). D_0 est soit un disque de rayon 8.5, soit une ellipse plus proche de D_* . Un objet avec une forte concavité est très difficile à imager, à cause des multiples réflexions. La phase semble importante pour ce type d'objet dans la reconstruction. Sans elle, le résultat n'est pas convenable. Avec elle, si l'objet est suffisamment bien éclairé, avec un assez bon état initial, la reconstruction peut être acceptable.

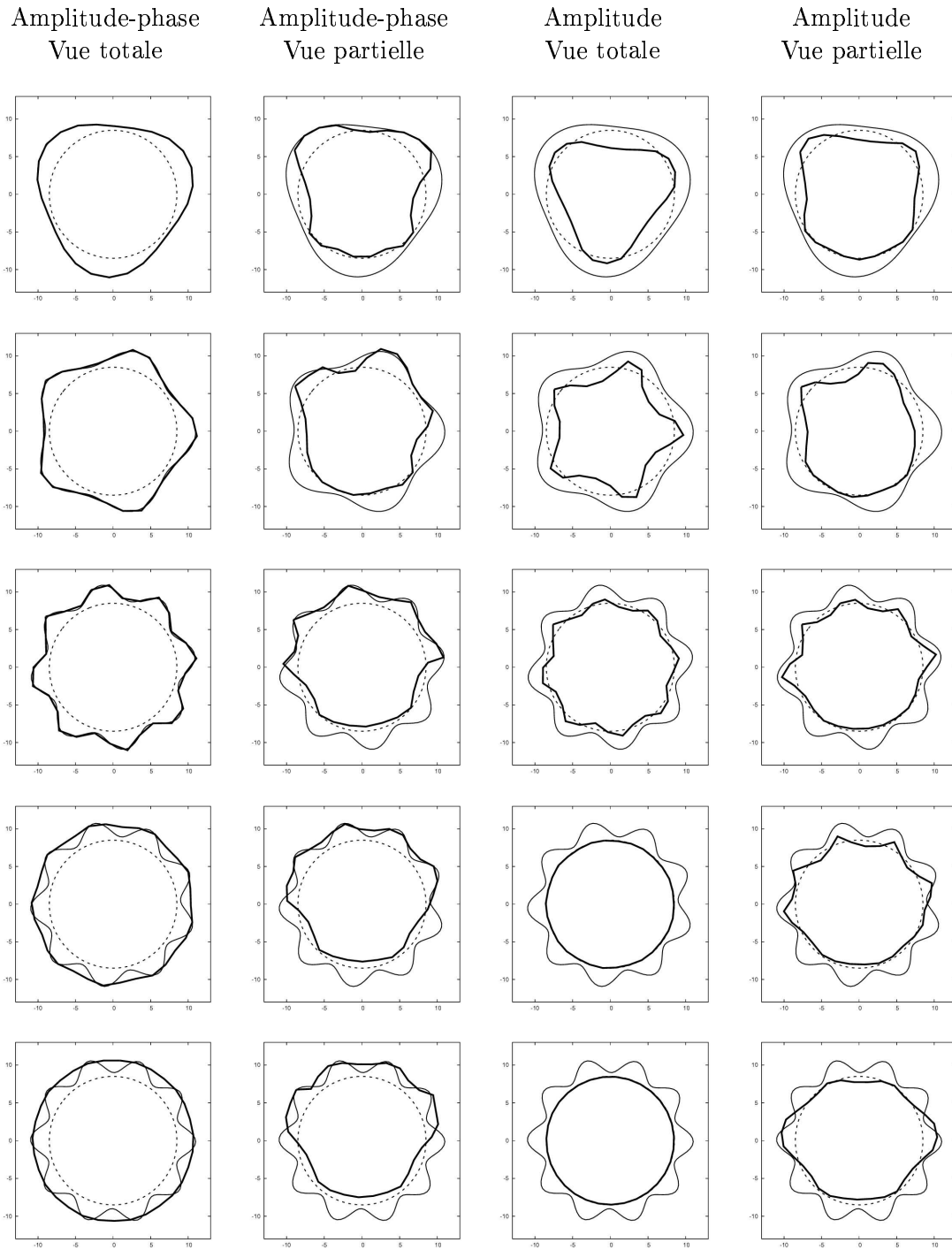


FIG. 13.3: Tests de résolution : reconstructions d'étoiles à $f = 3, 5, 8, 9, 10$ branches, d'amplitude $\alpha = 0.1$.

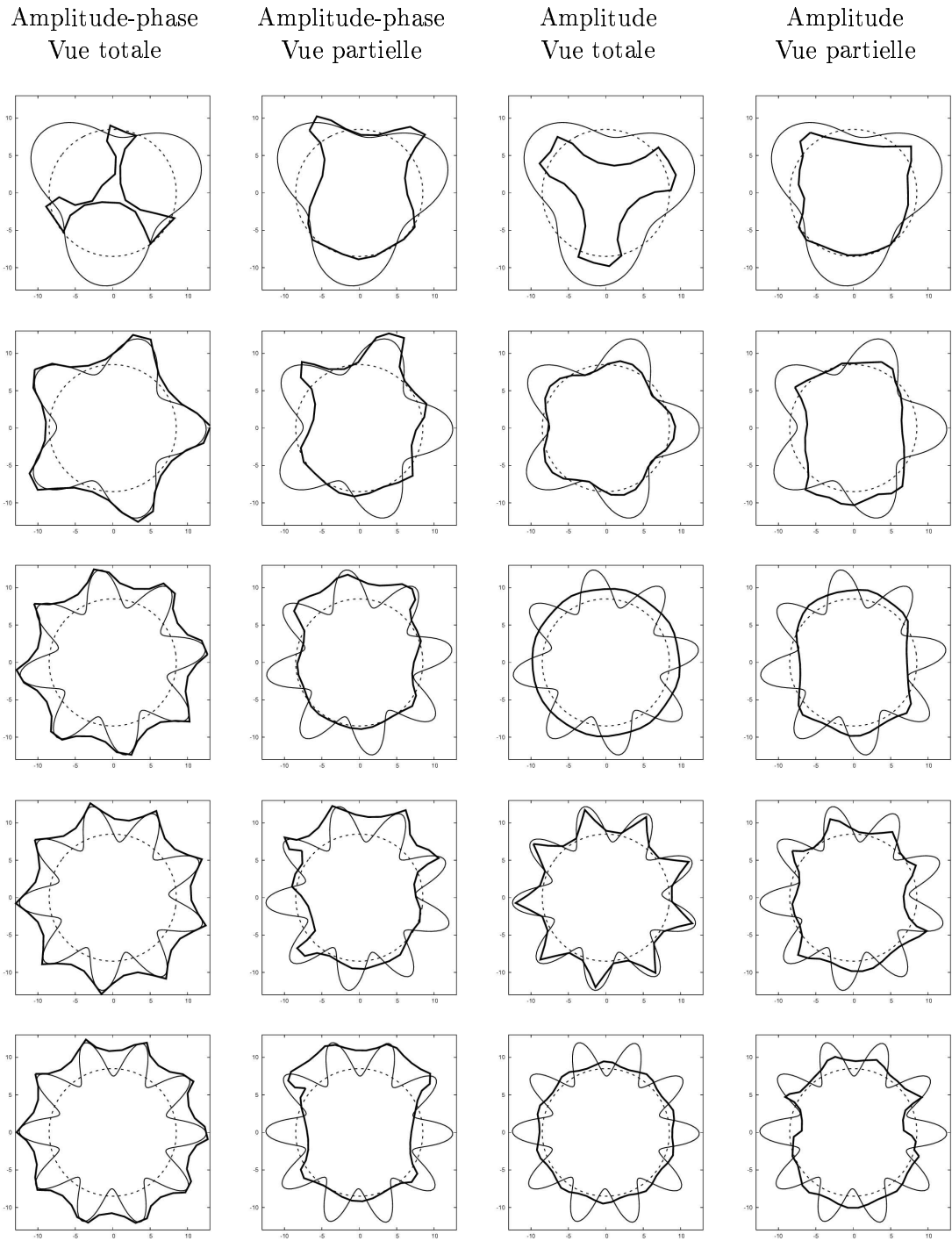
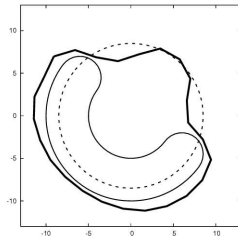
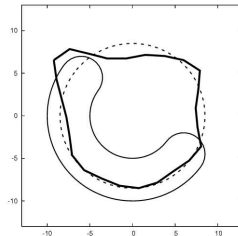


FIG. 13.4: Tests de résolution : reconstructions d'étoiles à $f = 3, 5, 8, 9, 10$ branches, d'amplitude $\alpha = 0.25$.

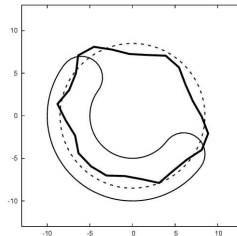
Amplitude-phase
Vue totale



Amplitude-phase
Vue partielle



Amplitude
Vue totale



Amplitude
Vue partielle

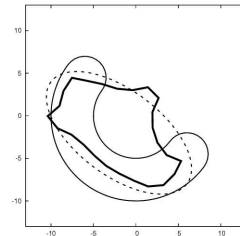
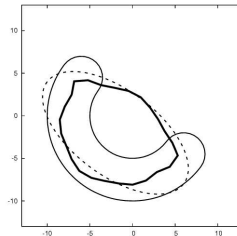
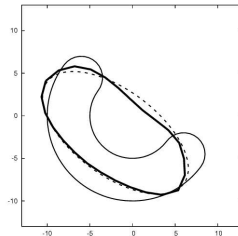
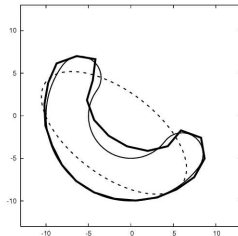
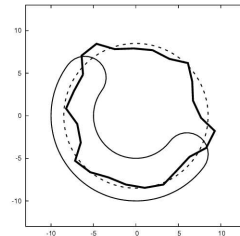


FIG. 13.5: Tests de résolution : reconstructions d'une banane, pour deux états initiaux.

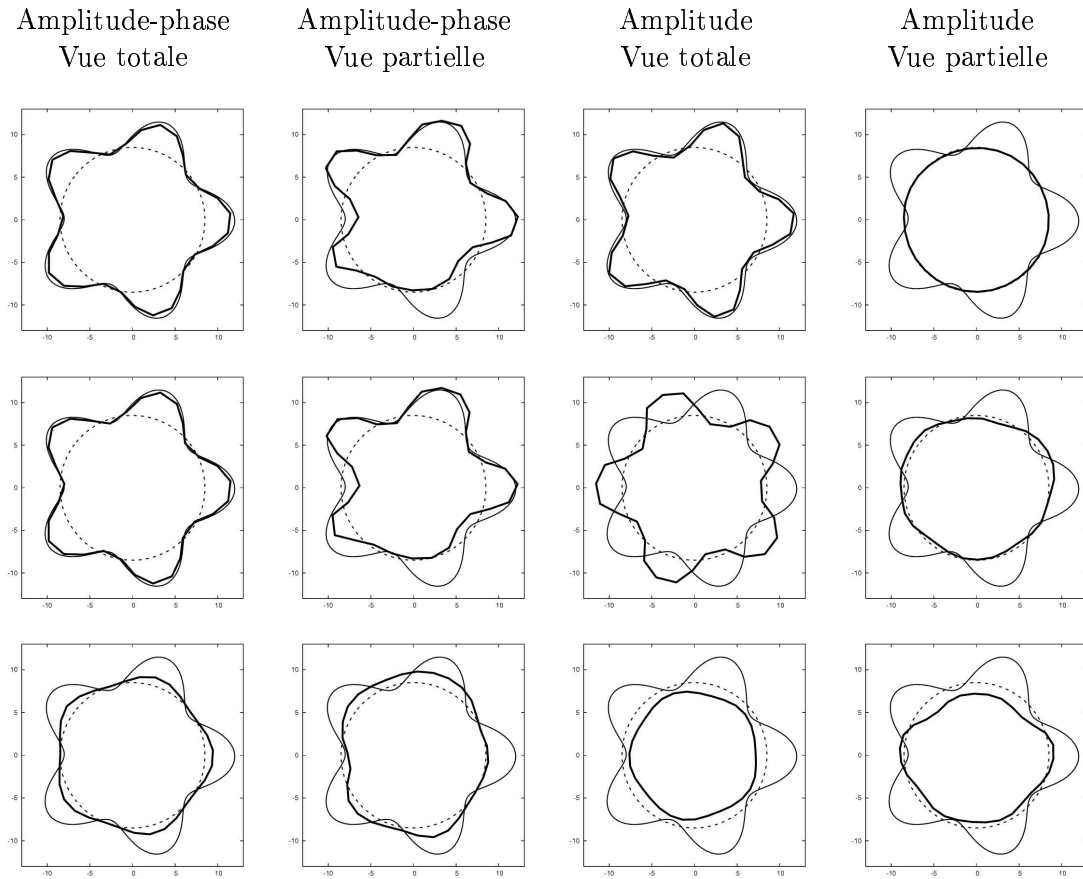


FIG. 13.6: Influence du contraste pour une inclusion de permittivité : solutions en fonction du contraste de permittivité $\kappa_\varepsilon = 100, 10, 1.11$.

13.3.6 Contraste

Nous allons illustrer l'influence du contraste sur la reconstruction, pour une inclusion de permittivité, et pour une inclusion de perméabilité. Ici, D_* est une étoile à 5 branches, d'amplitude 0.2 (et de rayon principal 10).

Inclusion de permittivité

D_* est une inclusion de permittivité $\varepsilon_* = 0.01, 0.1, 0.9$, et de perméabilité $\mu_* = 1$. Le contraste est $\kappa_\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_*}$ (Figure 13.6). On constate que la qualité de la reconstruction augmente avec le contraste de permittivité lorsque la phase est dans les mesures. Sans la phase, le résultat est parfait pour le cas à très fort contraste avec vue totale; il n'est pas bon pour les autres.

Inclusion de perméabilité

D_* est une inclusion de perméabilité $\mu_* = 0.01, 0.1, 0.9$, et de permittivité $\varepsilon_* = 1$. Le contraste est $\kappa_\mu = \frac{\mu_0}{\mu_*}$ (Figure 13.7). Le résultat est très net, la qualité de la reconstruction augmente avec le contraste de perméabilité.

13.3.7 Stabilité

Nous illustrons la stabilité de nos algorithmes en ajoutant du bruit aux données. Ici, D_* est une étoile à 5 branches, d'amplitude 0.2 (et de rayon principal 10.) ; $\varepsilon_* = 1.3$, $\mu_* = 0.1$; $\omega = 0.4$. D_0 est le disque de centre 0 et de rayon 10. On ajoute un bruit (Figure 13.8) de niveau $\sigma = 0\%, 5\%, 10\%, 15\%$

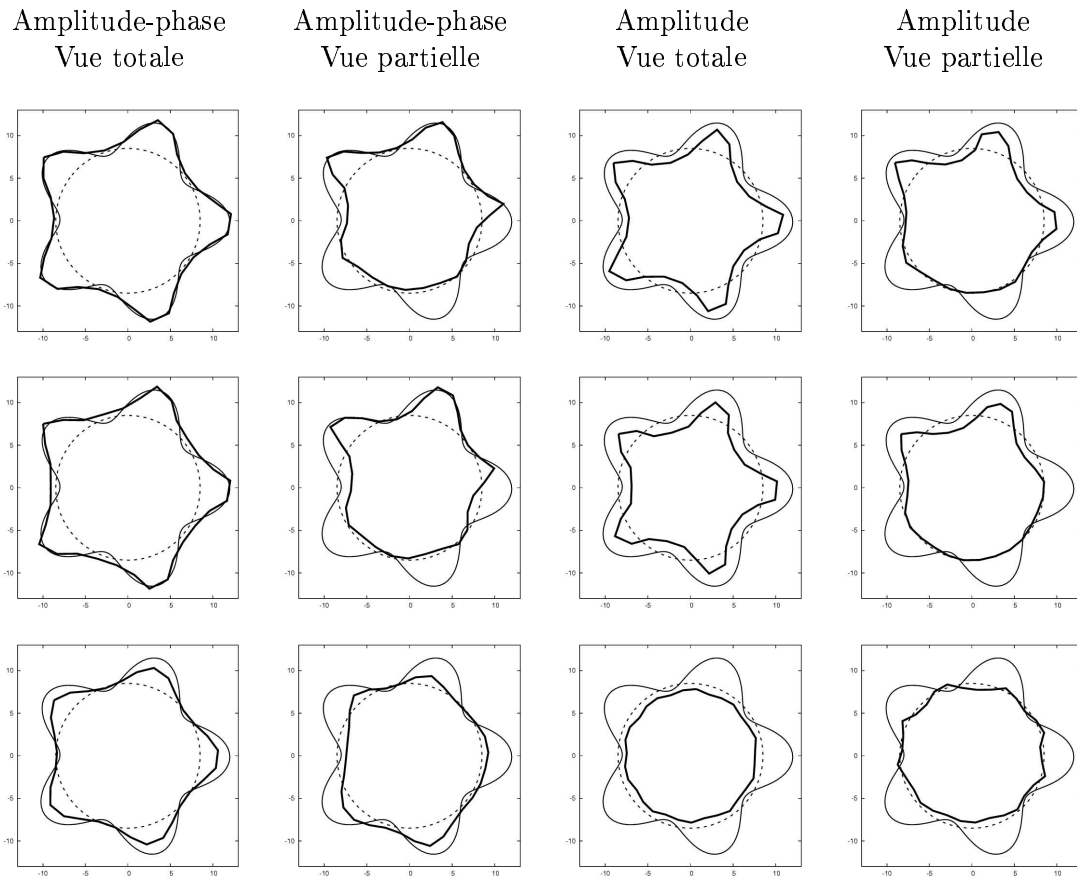


FIG. 13.7: Influence du contraste pour une inclusion de perméabilité : solutions en fonction du contraste de perméabilité $\kappa_\mu = 100, 10, 1.11$.

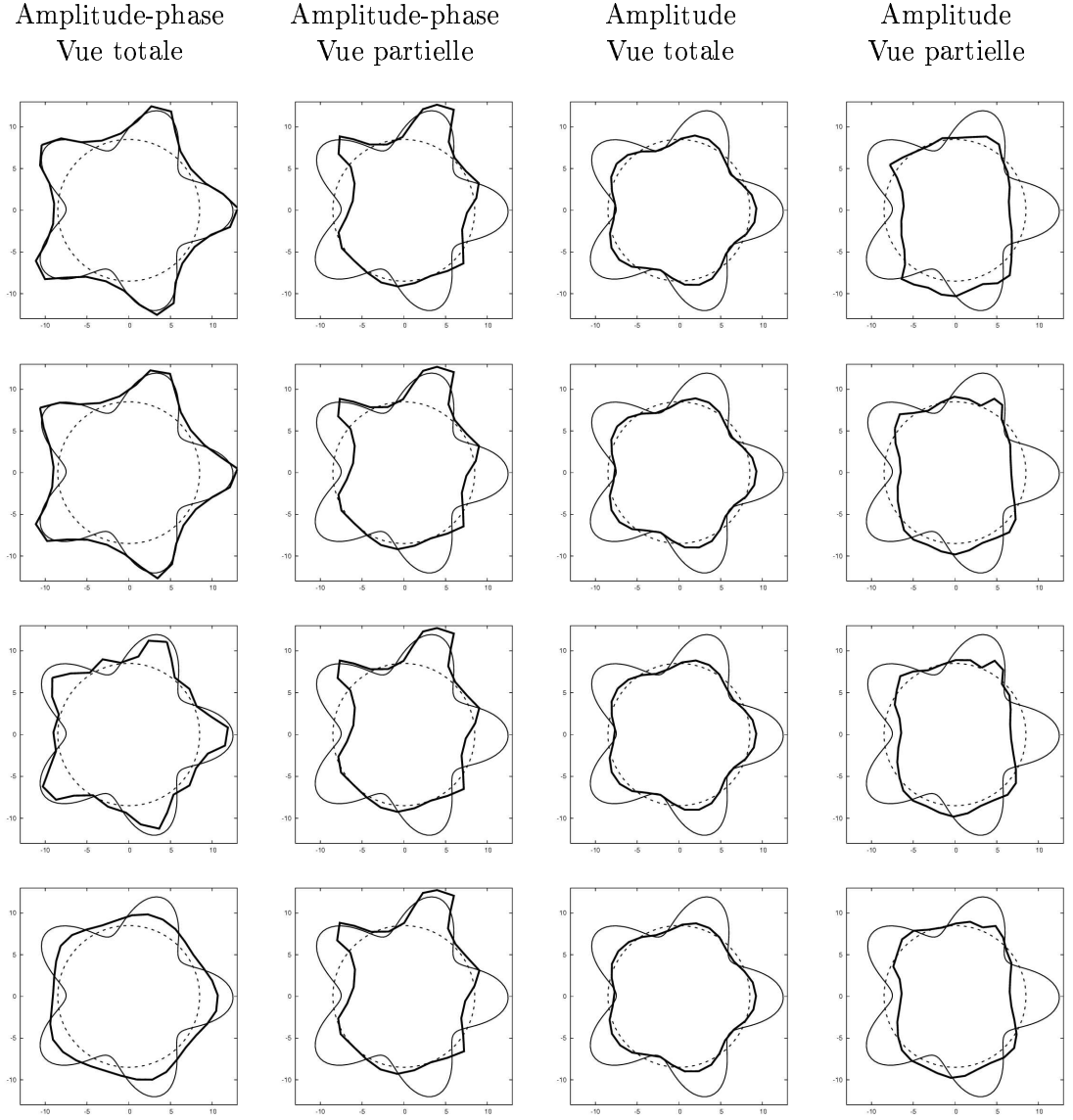


FIG. 13.8: Tests de stabilité : solutions en fonction d'un niveau de bruit $\sigma = 0\%, 5\%, 10\%, 15\%$.

à chaque mesure M_i :

$$\Re M_i := \Re M_i(1 + n_i), \text{ avec } n_i \text{ une réalisation de la loi normale } \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$

$$\Im M_i := \Im M_i(1 + n_i), \text{ avec } n_i \text{ une (autre) réalisation de la loi normale } \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Le résultat est stable. Seule la solution avec phase en vue totale est significativement perturbée, mais la perturbation reste raisonnable.

13.4 Conclusion et perspectives

Nous avons développé une méthode d'inversion itérative. Il s'agit d'une méthode de type descente de gradient, inspirée par les méthodes de l'optimisation de forme. L'idée a été exploitée pour deux types de problème inverse : l'un avec des mesures de l'onde rétrodiffusée, l'autre avec des mesures de l'amplitude seulement. Dans chaque cas, le gradient a été obtenu par composition des dérivées, à partir de la dérivée de forme de l'onde diffractée, qui était connue.

Nous avons testé numériquement cette méthode d'inversion, sur un objet étendu. Les résultats mettent en évidence la non-convexité de la fonctionnelle, d'où l'importance d'un bon état initial et d'un bon choix de pas de descente. La reconstruction porte sur la zone éclairée de l'objet ; la

zone d'ombre n'est pas bien imagée. La perte de la phase dans les mesures enlève l'espoir d'une reconstruction qui colle bien avec l'objet, mais n'empêche pas d'obtenir une bonne idée de la forme. La reconstruction est convenable pour une forme qui ne présente pas de concavités trop prononcées. Pour une forte concavité, mieux vaut connaître la phase et avoir de très bons angles d'éclairage pour espérer la retrouver. La qualité de la reconstruction augmente avec le contraste de perméabilité. Pour une inclusion de permittivité, on obtient la même conclusion mais lorsque la phase est dans les mesures ; sans la phase, les résultats ne sont pas pertinents. Enfin, l'ajout de bruit dans les mesures montrent la bonne stabilité de la reconstruction.

Dans les perspectives, on peut bien évidemment remettre en question le choix de l'état initial, et de la stratégie de pas de descente, et ce plus spécifiquement pour le cas motivé par la thèse : mesures d'amplitude, en vue partielle. Concernant les paramètres électromagnétiques de l'objet, on peut les supposer inconnus, et incorporer leur détermination dans nos méthodes, sous condition d'en avoir là encore une première estimation. Cela n'ajoute qu'un terme dans l'expression des gradients ; il correspond à la différentiation par rapport à eux. Quant à la zone d'ombre, son imagerie reste une question ouverte ; une pondération appropriée des mesures ou un meilleur choix de direction de descente sont peut-être des pistes à explorer. Enfin, citons l'extension de notre méthode d'évolution géométrique des contours à une méthode de type lignes de niveau, permettant les changements de topologie, et ainsi la reconstruction de plusieurs objets simultanément, sans *a priori* supplémentaire.

Conclusion

Nous avons étudié la reconstruction de la forme d'un objet situé dans l'espace libre, par illumination laser. Nous avons développé une méthode d'inversion directe des mesures d'amplitude des ondes rétrodiffusées. Il s'agit d'une méthode de type dérivée topologique, basée sur une approximation haute fréquence. Cette méthode, originale, constitue un premier pas important dans l'inversion en l'absence de phase dans les données. À défaut de donner une bonne estimation de la forme, elle en retrouve la position, et une direction privilégiée. D'autre part, nous avons développé une méthode itérative d'inversion de mesures d'amplitude, avec phase ou non. Il s'agit d'une méthode de type descente de gradient. Sous la condition d'avoir une idée initiale de l'objet, on observe numériquement que cette méthode donne une estimation de la zone éclairée de l'objet, y compris pour des mesures sans phase. Dans les applications que l'on vise, les données ne contiennent pas la phase. Il conviendrait de combiner nos deux approches, la méthode directe servant à donner un état initial à la méthode itérative. Précisons néanmoins que la première mérite un perfectionnement supplémentaire pour fournir un état initial assez précis.

Pour conclure, cette étude fournit des techniques modèles d'inversion. Elle permet d'envisager l'imagerie laser par mesure d'amplitude des ondes rétrodiffusées, en vue partielle. Pour imager un objet dissimulé dans une tenue de camouflage, comme souhaite le faire THALES, il faut désormais combiner les deux parties de la thèse. La première partie fournit le problème physique modèle, la deuxième les méthodes modèles d'imagerie.

Annexes

Logiciel d'électromagnétisme

Nous avons développé un pseudo-logiciel scientifique consacré à l'électromagnétisme. Nous présentons ici ses fonctions et la structure du code.

A.1 Fonctions

Un logiciel d'électromagnétisme

Le programme développé est un logiciel consacré à l'électromagnétisme. Il résout des problèmes directs, et des problèmes inverses. Un utilisateur entre les paramètres géométriques et physiques du problème qu'il souhaite résoudre. L'exécution du programme fournit alors en sortie un ensemble de fichiers, comprenant la solution du problème, ainsi que divers résultats intermédiaires.

Problèmes directs

Les problèmes directs qui peuvent être résolus sont des problèmes de Helmholtz bi-dimensionnels. Les deux grandes classes de milieux considérées sont les milieux sains, et les milieux malsains.

Milieux de fond Les problèmes que l'on peut résoudre dans des milieux de fond sont les suivants.

- Espace libre. Il s'agit du problème dans l'espace libre, dont la solution retenue est l'onde incidente plane.
- Peau périodique. Il s'agit du modèle de peau périodique, que l'on éclaire par une onde plane. Son équivalent asymptotique (deux demi-espaces avec des conditions de transmission) est calculé puis résolu explicitement.
- Point source dans l'espace libre. Il s'agit du problème d'un point source dans l'espace libre, dont la solution n'est autre qu'une fonction de Green.

Milieux malsains Un milieu malsain est un milieu sain auquel on ajoute une anomalie. La forme de l'anomalie est paramétrable : ellipse, triangle, polygone, banane, étoile, etc. La solution du problème dans un milieu malsain est obtenue par méthode des équations intégrales, à l'aide de la solution du problème dans le milieu sain, ainsi que des fonctions de Green appropriées.

Problèmes inverses

Le logiciel peut reconstruire l'anomalie d'un milieu malsain, à partir de mesures de l'onde rétro-diffusée sur une droite ou un cercle, avec ou sans la phase.

Phase-Amplitude Pour le cas où l'on connaît l'amplitude, la phase, ainsi qu'une première estimation de l'anomalie, la reconstruction se fait en résolvant itérativement un problème d'optimisation (par descente de gradient).

Amplitude Deux méthodes d'inversion sont développées pour le cas où l'on ne connaît que l'amplitude :

- Transport. Si on connaît l'amplitude sur deux segments droites parallèles, cette méthode obtient une estimation de l'anomalie à l'aide d'une dérivée topologique (issue d'une équation de transport).
- Optimisation. Cette méthode résout un problème d'optimisation, par une méthode itérative (descente de gradient). Cela suppose que l'utilisateur connaisse une première idée de l'anomalie.

La combinaison des deux méthodes est également possible : la première détermine alors l'estimation initiale de la seconde.

A.2 Structure du programme

Introduction

Pour développer un code naturel, nous avons élaboré un modèle objet qui calque la façon dont on pense les problèmes, ainsi que leurs méthodes de résolution. Nous allons présenter ici quelques diagrammes UML qui résument les principales composantes du code.

Anomalie

Une des principales caractéristiques d'une anomalie est sa forme, à choisir, par exemple, parmi les classes Ellipse, Polygone, Triangle, etc.

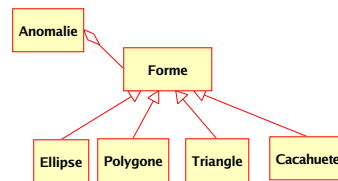


FIG. A.1: Anomalie

Milieux

Les différents types de milieux sont regroupés en fonction de leurs caractéristiques.

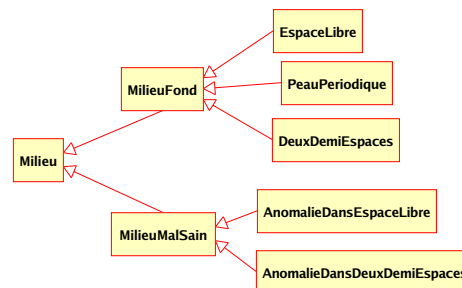


FIG. A.2: Milieux

Fonctions de Green

Les méthodes de résolution étudiées reposent en grande partie sur les fonctions de Green de différents milieux.

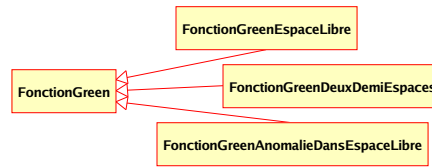


FIG. A.3: Fonctions de Green

Problèmes directs

Les différents problèmes directs sont factorisés selon leurs propriétés communes.

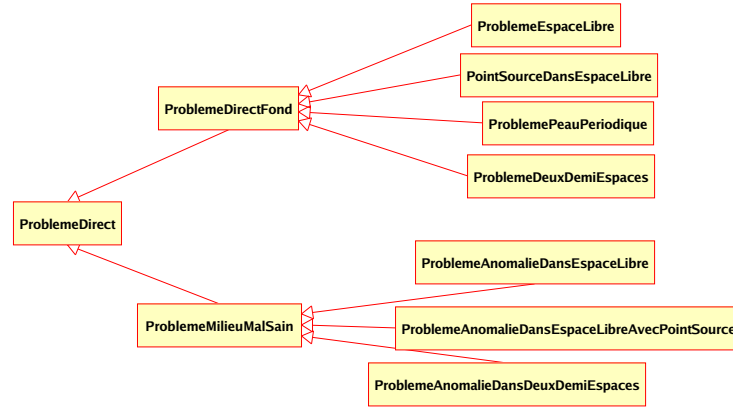


FIG. A.4: Problèmes directs

Solution des problèmes directs

Les solutions des problèmes peuvent être regroupées dans des structures analogues à celles des problèmes eux-mêmes.

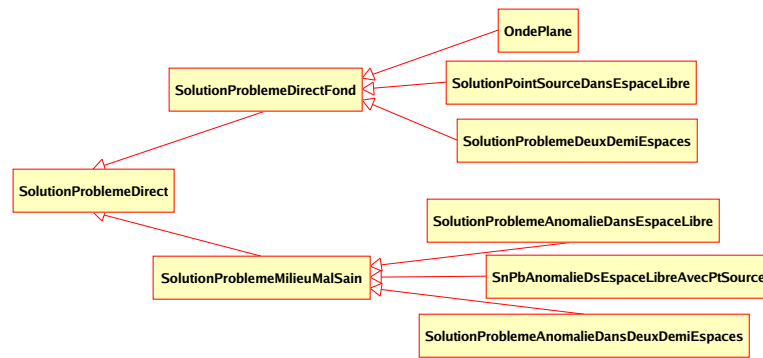


FIG. A.5: Solutions des problèmes directs

Inversion

Mesures d'amplitude Pour une anomalie dans un espace libre, on simule des données d'amplitude sur un ensemble de points de mesure pour le problème direct associé. Deux techniques d'inversion sont alors à base de ces données : le transport d'amplitude et la descente de gradient. La descente de gradient est une succession d'itérations.

Mesures phase-amplitude Un modèle similaire au cas de la seule amplitude mesurée peut s'écrire. (NB : on aurait pu aussi factoriser.)

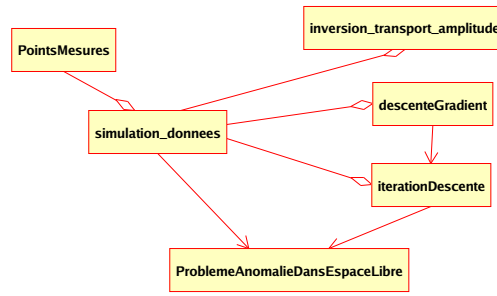


FIG. A.6: Inversion (mesures d'amplitude)

Conclusion

Ces quelques diagrammes fournissent de bonnes structures. Ils exploitent les liens entre différents concepts, via des relations d'héritage. Le modèle objet a été implémenté en C++. Les techniques de résolution numérique sont naturellement celles exposées dans la thèse.

A.3 Conclusion et perspectives

Les différentes techniques numériques présentées dans la thèse ont été implémentées. Elles sont développées dans un programme orienté objet qui exploite les liens entre différents concepts du sujet. Le résultat est un pseudo-logiciel scientifique qui a permis de faire les simulations numériques.

Parmi les perspectives de ce code, on peut citer l'extension à la résolution des équations Maxwell tri-dimensionnelles en milieu aléatoire (et des problèmes inverses associés). Enfin, une interface graphique permettrait de le rendre plus convivial.

Validation du code des équations intégrales

B.1 Introduction

Nous avons écrit un code de résolution de problèmes directs par la méthode des équations intégrales. Dans cette annexe, on propose de comparer la solution avec celle que l'on obtient analytiquement, dans le cas de la diffraction par un disque. Cela constitue un test de validité du code.

B.2 Problème direct

On se place dans le cas du problème direct intervenant dans la deuxième partie de la thèse. Nous le rappelons rapidement pour le confort du lecteur. On considère l'espace libre de paramètres ε_0 et μ_0 . La pulsation est $\omega > 0$ fixée. Le nombre d'onde est $k_0 := \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$. On ajoute dans ce milieu une anomalie D de paramètres ε_* et μ_* . Le nombre d'onde correspondant est $k_* := \omega\sqrt{\varepsilon_*\mu_*}$. On pose $\frac{1}{\mu} := \frac{1}{\mu_*}\mathbb{1}_D + \frac{1}{\mu_0}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}}$, et $\varepsilon := \varepsilon_*\mathbb{1}_D + \varepsilon_0\mathbb{1}_{\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}}$. On éclaire D par une onde incidente plane d'angle $\eta : u_{\text{inc}}(\eta, x) = e^{ik_0\eta \cdot x} = u_{\text{inc}}(x)$. On obtient alors l'onde $u[D](\eta, x) = u(x)$, solution de :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \frac{1}{\mu} \nabla u + \omega^2 \varepsilon u = 0, \\ + \text{condition de radiation sortante.} \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Dans $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$, $u[D](\eta, x)$ est la superposition de l'onde incidente $u_{\text{inc}}(\eta, x)$, et de l'onde diffractée $u_{\text{dif}}(x) = u_{\text{dif}}[D](\eta, x) := u[D](\eta, x) - u_{\text{inc}}(\eta, x)$.

Nous avons écrit un code des équations intégrales pour résoudre ce problème ; nous renvoyons le lecteur au chapitre 11 pour la formule de représentation intégrale et au chapitre 7 pour plus d'informations sur la partie numérique. C'est précisément ce code que l'on souhaite tester, en comparant avec une solution obtenue analytiquement.

B.3 Diffraction par un disque

Nous savons calculer la solution du problème (B.1) de manière analytique dans le cas d'un disque. Par symétrie radiale, il suffit en effet, dans ce cas, d'écrire le problème en coordonnées polaires $(r, \theta) : x = r(\cos \theta, \sin \theta)$. Essentiellement, la démarche repose ensuite sur les propriétés des fonctions de Bessel [35]. Nous supposons donc ici que D est le disque unité, et $\eta = (0, 1)$.

Séries de Fourier La solution u se décompose en série de Fourier de la manière suivante : $u(r, \theta) = \sum_n \hat{u}_n(r) e^{in\theta}$. Par ailleurs, la décomposition en série de Fourier de $u_{\text{inc}}(r, \theta) = e^{ik_0 r \sin \theta}$ est $u_{\text{inc}}(r, \theta) = \sum_n J_n(k_0 r) e^{in\theta}$, où J_n est une fonction de Bessel, se décomposant à base de fonctions de Hankel : $J_n(k_0 r) = \frac{1}{2} \left(H_n^{(1)}(k_0 r) + H_n^{(2)}(k_0 r) \right)$.

Onde diffractée Classiquement, dans $\{r > 1\}$, $\hat{u}_n(r)$ vérifie une équation de Bessel dont une base de solutions est $(H_n^{(1)}(k_0 r), H_n^{(2)}(k_0 r))$, et donc $\hat{u}_n(r) = \alpha_n H_n^{(1)}(k_0 r) + \tilde{\alpha}_n H_n^{(2)}(k_0 r)$, $r > 1$. Ainsi, le coefficient de Fourier n de $u_{\text{dif}}(r, \theta)$ est : $(\alpha_n - \frac{1}{2}) H_n^{(1)}(k_0 r) + (\tilde{\alpha}_n - \frac{1}{2}) H_n^{(2)}(k_0 r)$. Comme le premier terme satisfait la condition de radiation, le second doit la satisfaire, *i.e.* $\tilde{\alpha}_n - \frac{1}{2} = 0$.

Onde transmise D'autre part, dans $\{0 < r < 1\}$, $\hat{u}_n(r)$ vérifie une équation de Bessel dont une base de solutions est $(H_n^{(1)}(k_* r), H_n^{(2)}(k_* r))$, et donc $\hat{u}_n(r) = \beta_n H_n^{(1)}(k_* r) + \tilde{\beta}_n H_n^{(2)}(k_* r)$, $0 < r < 1$. Par régularité de $\hat{u}_n(r)$ et du reste $\hat{u}_n(r) - (\beta_n - \tilde{\beta}_n) \frac{2i}{\pi} \log r$, $\beta_n - \tilde{\beta}_n = 0$.

Conditions de transmission On pose $h_0^n := H_n^{(1)}(k_0)$, $h_*^n := H_n^{(1)}(k_*)$, $h_0^{n'} := \frac{dH_n^{(1)}}{dr}(k_0)$, $h_*^{n'} := \frac{dH_n^{(1)}}{dr}(k_*)$. La continuité de u et de $\frac{1}{\mu} \partial_\nu u$ à travers la frontière ∂D montrent enfin que (α_n, β_n) satisfait le système suivant :

$$\begin{bmatrix} h_0^n & -2\Re h_*^n \\ \frac{k_0}{\mu_0} h_0^{n'} & -2\frac{k_*}{\mu_*} \Re h_*^{n'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \overline{h_0^n} \\ -\frac{1}{2} \frac{k_0}{\mu_0} \overline{h_0^{n'}} \end{bmatrix},$$

Ainsi,

$$\alpha_n = \det_n^\alpha / \det_n, \quad \beta_n = \det_n^\beta / \det_n,$$

avec

$$\det_n := -2\frac{k_*}{\mu_*} h_0^n \Re h_*^{n'} + 2\frac{k_0}{\mu_0} h_0^{n'} \Re h_*^n, \quad \det_n^\alpha := \frac{k_*}{\mu_*} \overline{h_0^n} \Re h_*^{n'} - \frac{k_0}{\mu_0} \overline{h_0^{n'}} \Re h_*^n, \quad \det_n^\beta := i \frac{k_0}{\mu_0} \Im(h_0^{n'} \overline{h_0^n}).$$

Conclusion Finalement :

$$u(r, \theta) = \begin{cases} u_{\text{inc}}(r, \theta) + \sum_n (\alpha_n - \frac{1}{2}) H_n^{(1)}(k_0 r) e^{in\theta}, & r > 1, \\ \sum_n 2\beta_n \Re(H_n^{(1)}(k_* r)) e^{in\theta}, & r < 1. \end{cases}$$

Les sommes sont indexées par \mathbb{Z} . Numériquement, on a réduit l'indexation à $|n| \leq k_* r + 5$.

B.4 Comparaison des résultats

Nous comparons les résultats numériques obtenus avec le code des équations intégrales et la solution analytique de la section précédente. D est donc le disque unité, et $\eta = (0, 1)$. On fixe $\omega = 0.3$, $\varepsilon_0 = 3.14$, $\mu_0 = 1$, $\varepsilon_* = 1$ et $\mu_* = 10$. Pour les équations intégrales, on discrétise en 100 points. Pour la solution analytique, on réduit l'indexation de la somme à $|n| \leq k_* r + 5$. On ajoute un exposant a à la solution obtenue de façon analytique. La Figure B.1 contient les résultats.

Concernant le module de la solution u , l'erreur relative est de moins de 2%. En retranchant l'onde incidente, on obtient l'onde diffractée et on augmente l'erreur. Ceci est logique : l'onde incidente est exacte dans les deux cas et est plus grande que l'onde diffractée. L'erreur augmente très nettement dans certaines directions, jusqu'à 16% pour le rapport des modules. Il s'agit certainement d'instabilités numériques du calcul de l'erreur : l'onde diffractée s'annule presque. Le résultat reste acceptable. Enfin, en argument, l'onde diffractée coïncide pour les deux méthodes, l'erreur est faible.

B.5 Conclusion

La solution analytique dans le cas du disque coïncide très bien avec la solution du code des éléments finis de frontière, ce qui est très réconfortant. Naturellement, il serait intéressant d'effectuer d'autres tests de validations : comparaison avec les éléments finis volumiques (après avoir tronqué le domaine avec une bonne condition au bord), comparaison avec l'approximation de l'optique géométrique, etc.

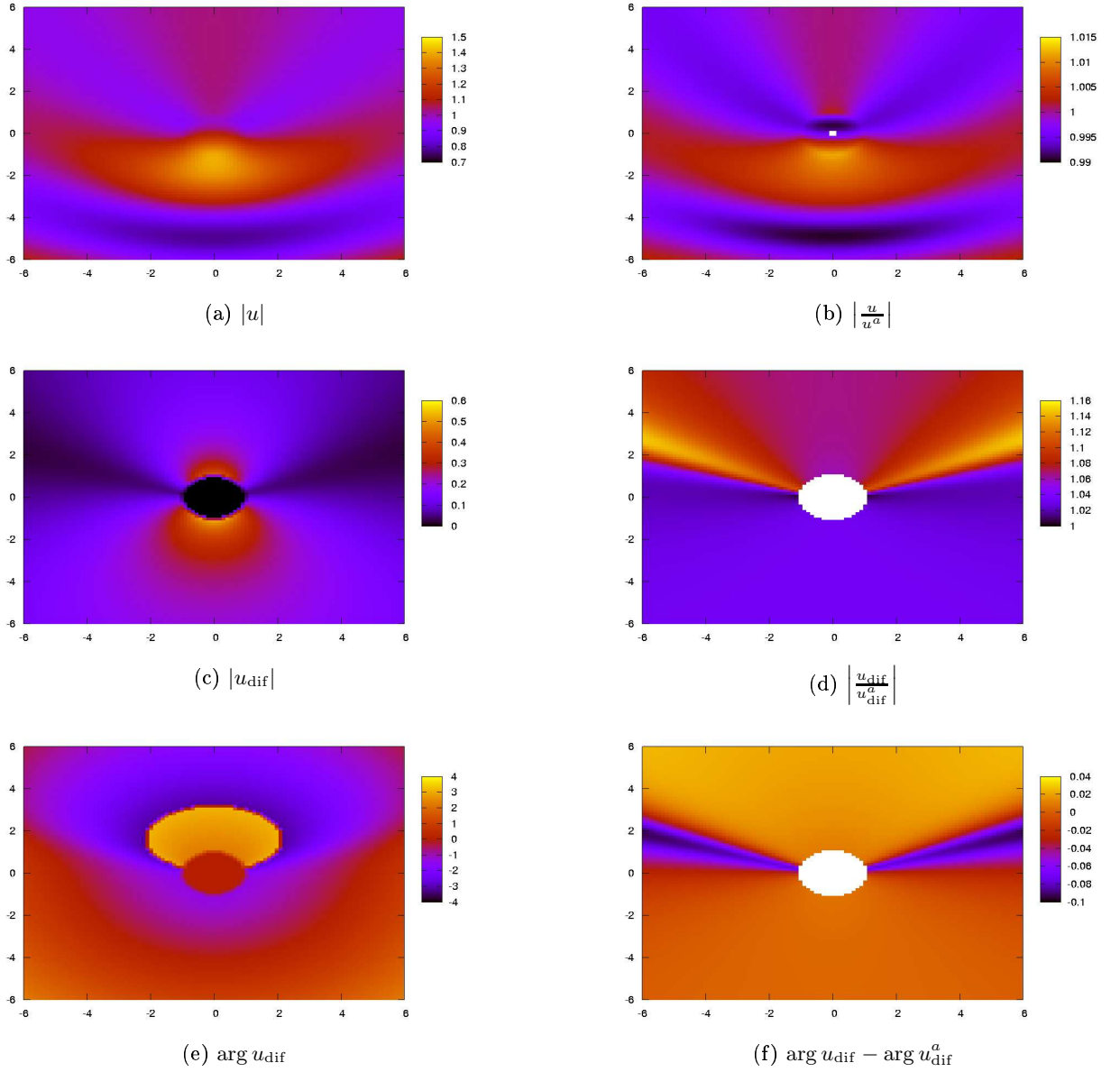


FIG. B.1: Comparaison de la solution du code des équations intégrales avec la solution analytique, pour un disque. À gauche, on lit les résultats du code des équations intégrales ; à droite, on lit leur rapport avec la solution analytique. Du haut vers le bas, sont passés en revue : le module de l'onde, le module de l'onde diffractée, l'argument de l'onde diffractée.

Bibliographie

- [1] T. Abboud and H. Ammari. Diffraction at a curved grating : TM and TE cases, homogenization. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 202 :995–1026, 1996.
- [2] T. Abboud and I. Terrasse. Modélisation des phénomènes de propagation d’ondes. Cours de l’École Polytechnique, 2006.
- [3] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, 1965.
- [4] G. Allaire. Homogenization and two-scale convergence. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 23 :1482–1518, 1992.
- [5] G. Allaire. *Conception optimale de structures*. Springer, 2007.
- [6] G. Allaire and M. Amar. Boundary layer tails in periodic homogenization. *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 4 :209–243, 1999.
- [7] H. Ammari. *An Introduction to Mathematics of Emerging Biomedical Imaging*. Springer, 2008.
- [8] H. Ammari, J. Garnier, H. Kang, M. Lim, and K. Sølna. Multistatic imaging of extended targets. Preprint.
- [9] H. Ammari, J. Garnier, H. Kang, W. Park, and K. Sølna. Imaging schemes for perfectly conducting cracks.
- [10] H. Ammari, E. Iakovleva, and D. Lesselier. A music algorithm for locating small inclusions buried in a half-space from the scattering amplitude at a fixed frequency. *Multiscale Modeling and Simulation : A SIAM Interdisciplinary Journal*, 3 :597–628, 2005.
- [11] H. Ammari and H. Kang. *Reconstruction of small inhomogeneities from boundary measurements*. Springer Verlag, 2004.
- [12] H. Ammari, H. Kang, and H. Lee. *Layer Potential Techniques in Spectral Analysis*. American Mathematical Society, 2009.
- [13] R. R. Anderson and J. A. Parrish. The optics of human skin. *Journal of Investigative Dermatology*, 77(1) :13–19, 1981.
- [14] D. Auroux and M. Masmoudi. Image processing by topological asymptotic expansion. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 33(2) :122–134, 2009.
- [15] A. N. Bashkatov, E. A. Genina, V. I. Kochubey, and V. V. Tuchin. Optical properties of human skin, subcutaneous and mucous tissues in the wavelength range from 400 to 2000 nm. *Journal of Physics D : Applied Physics*, 38 :2543–2555, 2005.
- [16] A. Bendali and C. Devys. Calcul numérique du rayonnement de cornets électromagnétiques dont l’ouverture est partiellement remplie par un diélectrique. Technical report, Paris, 1992.
- [17] E. Beretta and E. Francini. Asymptotic formulas for perturbations in the electromagnetic fields due to the presence of thin inhomogeneities. In *Inverse problems : theory and applications*, volume 333, page 49. American Mathematical Society, 2003.
- [18] G. Berginc. Imagerie thermique, laser et modélisation en biophotonique. In *ESAIM : Proceedings*, volume 26, pages 135–149, 2009.

- [19] A. Blasselle, V. Calvez, and A. Moussa. A rainbow inverse problem. 2010.
- [20] N. Bleistein. *Mathematical methods for wave phenomena*. Academic Press, 1984.
- [21] N. Bleistein and R. A. Handelsman. *Asymptotic Expansions of Integrals*. Dover, 1986.
- [22] D. Cioranescu and P. Donato. *An introduction to Homogenization*. Oxford University Press, 1999.
- [23] I. Ciuperca, M. Jai, and C. Poignard. Approximate transmission conditions through a rough thin layer. the case of the periodic roughness. *European Journal of Applied Mathematics*, 2009.
- [24] T. Cui and W. Chew. Efficient evaluation of sommerfeld integrals for tm wave scattering by buried objects. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, 12 :607–657, 1998.
- [25] M. Durán, I. Muga, and J.-C. Nédélec. The Helmholtz equation with impedance in a half-space. *Comptes Rendus Mathématique*, 341(9) :561–566, 2005.
- [26] D. J. Hansen and M. S. Vogelius. High frequency perturbation formulas for the effect of small inhomogeneities. In *Journal of Physics : Conference Series*, volume 135. Institute of Physics Publishing, 2008.
- [27] R. Hein. Computing numerically the green’s function of the half-plane helmholtz equation with impedance boundary conditions. Master’s thesis, Pontificia Universidad Católica De Chile, Escuela de Ingeniería, 2006.
- [28] C. Jerez-Hanckes and J.-C. Nédélec. Asymptotics for Helmholtz and Maxwell solutions in 3-D open waveguides. Technical report, ETH, Zürich, 2010.
- [29] J. E. Marsden and M. J. Hoffman. *Basic complex analysis*. W. H. Freeman and Company, New York, third edition, 1999.
- [30] P. D. Miller. *Applied Asymptotic Analysis*. American Mathematical Society, 2006.
- [31] M. I. Mishchenko. Maxwell’s equations, radiative transfer, and coherent backscattering : A general perspective. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 101(3) :540–555, 2006.
- [32] J.-C. Nédélec. *Acoustic and Electromagnetic Equations*. Springer, 2001.
- [33] K. P. Nielsen, L. Zhao, G. A. Ryzhikov, M. S. Biryulina, E. R. Sommersten, J. J. Stamnes, K. Stamnes, and J. Moan. Retrieval of the physiological state of human skin from UV-Vis reflectance spectra-A feasibility study. *Journal of Photochemistry and Photobiology B : Biology*, 93(1) :23–31, 2008.
- [34] K. P. Nielsen, L. Zhao, J. J. Stamnes, K. Stamnes, and J. Moan. The optics of human skin : Aspects important for human health. *Solar Radiation and Human Health*, 2008.
- [35] A. F. Nikiforov and V. B. Uvarov. *Specials functions of mathematical physics*. Birkhäuser, 1988. Traduit du Russe par Ralph P. Boas.
- [36] F. Olver. *Asymptotics and special functions*. Academic Press, 1974.
- [37] W. Rudin. *Analyse réelle et complexe*. Dunod, 3^e edition, 1998. Traduction de Jean Dhombres.
- [38] A. Soubret. *Diffusion des ondes électromagnétiques par des milieux et des surfaces aléatoires : étude des effets cohérents dans le champ diffusé*. PhD thesis, Université de la Méditerranée - Aix-Marseille II, 2001.
- [39] A. Soubret and G. Berginc. Electromagnetic wave scattering from a random layer with rough interfaces II : Diffusive intensity. *Arxiv preprint physics*, 2003.
- [40] L. Tartar. Compensated compactness and applications to partial differential equations. In *Nonlinear analysis and mechanics : Heriot-Watt symposium*, volume 4, pages 136–212, 1979.
- [41] M. J. C. Van Gemert, S. L. Jacques, H. Sterenborg, and W. M. Star. Skin optics. *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on*, 36(12) :1146–1154, 2002.